I A 12

I 1533

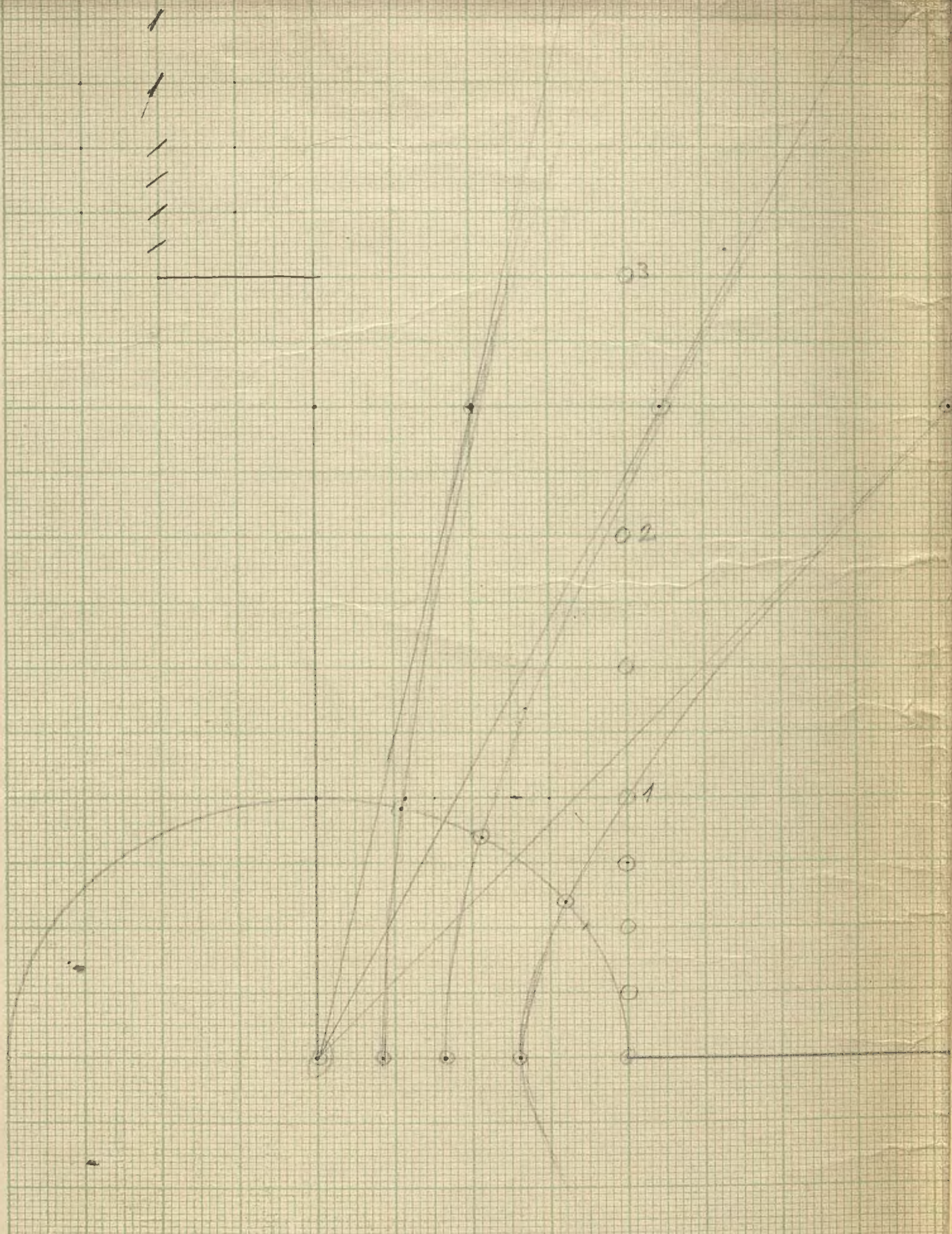
Rękopisy

Rozpraw hydrodynamicznych

30 b.

~~II.~~ Korrektur

1


3
2
1

1

I, 539

[Brulion
por. 30 b]

por. 2 kart.
Rkp. AU 1307.
1-16.

Maryan Smoluchowski: Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich, a zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych.

W pierwszej części (przy tej) autor rozpatruje warunki graniczne, określające w jednoznaczny sposób (powolny) ruch stacyjny cieczy lepkiej. Wiadomo, że według badań Helmholtza, Kortewega i Rayleigha do określenia zagadnień tego rodzaju służyć by miało podanie (rozkładu) prędkości na powierzchni otaczającej badaną część przestrzeni. Autor zaznacza jednak, że sposób ten (nie) daje się zastosować w razie jeżeli powierzchnia ~~[illegible]~~ obejmuje przestrzeń nieskończoną, a z drugiej strony, że w praktyce doświadczalnej nie prędkości tylko ciśnienia hidrostatyczne są dane, które (działające) na powierzchnię cieczy w ~~[illegible]~~ zbiornikach (ile możności dużych) powodują ruch określony w przewodzie łączącym. Autor wprowadza wobec tego pojęcie ruchów „skończonych", do których wszystkie w praktyce możliwe należą, i dowodzi że istotnie do (jednoznacznego) określenia (takiego) ruchu „skończonego" wystarcza w ogólności podanie rozkładu ciśnienia działającego w odległości nieskończonej.

W drugiej części autor zajmuje się specyalnie (które stosunkowo mało dotychczas były badane) ruchami dwuwymiarowymi. Wyprowadza ~~ogólną~~ pewną dogodną do użytku formę ogólnego rozwiązania takich zagadnień i pokazuje zastosowanie jej (na kilku przykładach) ~~[illegible]~~ ruchu odbywającego się w obecności (nieskończonej) ściany płaskiej.

Są to mianowicie: przepływ cieczy przez otwór (szparę) w ścianie płaskiej, i ruch wzdłuż takiej ściany zaopatrzonej otworem, i dalsze przykłady, z tamtych otrzymane przez specyalizacyę, jak ruch cieczy w otoczeniu (bliskości) krawędzi matematycznie

w przestrzeni między ścianami stykającemi się pod kątem ostrym)

ostrej, wypływ cieczy z źródła, znajdującego się w miejscu ~~umieszczonego w~~ ich przecięcia. Autor wskazuje

także na związek ~~tych~~ wyników z ~~pewnymi~~ (obliczeniami Rayleigha i Sampsona,

(otrzymanych) i innych nie analogicznych)

W rozprawie ... podałem ~~spostrzeżone~~ rezultaty badania doświadczalnego zjawisk występujących przy wypływie cieczy, które ~~mogłyby~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible] dowodzić iż~~ przemawiają przeciwko teorii Helmholtza powstawania ~~przedmiotem~~ ~~Praca niniejsza jest w związku z rozprawą~~ ... w cieczach [1], a dowodzą że zjawisko to polega na współdziałaniu lepkości i bezwładności cieczy. ~~[illegible] do~~

Treścią niniejszej rozprawy jest kilka wyników teoretycznych będących w związku z tym przedmiotem ~~Wtedy badanie teoretyczne tego przedmiotu [illegible] doprowadziło mnie do kilku wyników~~, które ~~[illegible]~~ jednak także same przez się jako przyczynek do hydrodynamiki cieczy lepkich, pewien interes przedstawiają, ~~i które stanowią treść~~ dla tego - główną ~~niniejszej pracy~~.

Badania Helmholtza, Kortewega i Rayleigha wykazały że (równanie określające t. zw. powolny stateczny) ruch cieczy lepkiej równania:

$$\mu \Delta^2 u = \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\mu \Delta^2 v = \frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\mu \Delta^2 w = \frac{\partial p}{\partial z}$$

nie posiadają więcej niż jedno ~~rozwiązanie~~ całki (I)

jednoznacznie określone przez podanie wartości prędkości u v w na (podzielić wszystkie u v w) powierzchni obszaru badanego; znalazłszy zatem takie rozwiązanie zadość czyniące warunkom powierzchniowym (w praktyce u = v = w = 0 przyjmowane) wiemy że jest to jedynym możliwym rozwiązaniem. Trzeba jednak zauważyć, że po pierwsze [illegible] w badaniu teoryi ~~dowody~~ ~~[illegible]~~ mniejszego przyjęto ~~[illegible]~~ założenie skończoności obszaru, ~~[illegible]~~ na którego powierzchni dane są warunki graniczne, gdyż polegają ~~one~~ wszystkie one dowody na zniknięciu

Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich.

I). Jednoznaczność rozwiązania

§1). Wiadomo że według badań Helmholtza i Kortewega i Rayleigh'a równania określające t. zw. (stacyjny) powolny ruch cieczy lepkich, mianowicie zgodnie z warunkiem ciągłości i nie posiadają więcej nad jedną całkę, spełniającą warunek ażeby na powierzchni przestrzeni obszaru badanego prędkości u v w określone wartości przybrały. Jeżeli zatem rozwiązanie (zadość czyniące owym warunkom) znaleziono to wiemy że jest to jedynem możliwem rozwiązaniem.

~~Nasuwają się tu jednak dwie uwagi.~~

związane są z milczącym przytem założeniem, że obszar, na którego powierzchni S dane są prędkości, nie sięga do nieskończoności, gdyż polegają one na tem że całka krótka $\int F dS$ (zniknąć musi) w skutek przyjęcia F niesk. mał., co oczywiście nie jest usprawiedliwionem jeżeli powierzchnia S nie można określić tylko jednoznacznie jest nieskończoną całka. Zatem ... Rzeczywiście poznamy też później przykład ruchu (dwuwymiarowego) (№) który spełnia jest warunek $\lim_{\infty} u = \lim_{\infty} v = 0$, podczas gdy w obszarze skończonym jedynem rozwiązaniem zgodnem z nieruchomością cieczy na ścianach naczynia zamkniętego jest stan zupełnego spoczynku.

§2). Z drugiej strony zauważymy że w praktyce eksperymentalnej otrzymujemy (Maxwell) (przybliżenie) stacyjny ruch cieczy wtedy gdy dwa naczynia między dwa zbiornikami dwie ... między któremi istnieje pewna różnica ciśnienia, że zatem nie są dane prędkości na powierzchni obszaru lecz ciśnienia, a ruch zadość czyni warunkom określonym.

dobrać taki ~~tak~~ odnoszące któreby

Chcąc jednak na tej podstawie ~~matematycznie zbadać~~ zadania ~~[illegible]~~ odpowiedzialny

problematów praktyki, napotyka się na pewne trudności.

~~Jako~~ typowy sposób jak) ~~[illegible]~~

(W praktyce doświadczalnej ~~[illegible]~~ ~~otrzymujemy przyłożony~~ wytwarzający ruch (przykład)

statyczny dlaczego lepkiego, że jest taki dany przewód zakleszczony między dwa naczyniami o pewnej różnicy (w których wytwarzany)

ciśnienia hydrostatycznego. ~~[illegible]~~ Dowiedziono nawet, że stąd ~~[illegible]~~ przydany ~~tylko od~~ kształtu

rurk (zależy) tylko od różnicy ciśnień na powierzchni cieczy w naczyniach wyciekających niezależnie od kształtu i również tylko przewodu

~~[illegible]~~ (jeżeli ~~[illegible]~~ są one dostatecznie wielkie; ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

jest zupełnie obojętny)

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Poprzednie

~~[illegible]~~ zawodzą tutaj, że ~~[illegible]~~ przedtem dowody jednoznaczności (nie są ogólne bo są

zwrócone ~~[illegible]~~ milcząco przyjętem założeniem, że obszar S na którego powierzchni dane są one

przedtem, nie sięga do nieskończoności. (Polegają one w zamknięciu) na tem, że ~~[illegible]~~ całka kształtu

$\int F\, d\sigma$ zniknąć musi wskutek ~~[illegible]~~ (zmierzania do zera wielkości F w owej powierzchni, podczas gdy

~~[illegible]~~ tego rozumowania nie można stosować ~~[illegible]~~ (w razie nieskończenie wielkiej powierzchni S

w której $\lim_{\infty} F = 0$. Istotnie poznamy też . . . . . ~~co dowodzi że owe twierdzenie w tym~~

razie nie jest prawdziwe.

Dalej nasuwa się następująca uwaga :

całki $\int F\, dS$ ponad powierzchnią obszaru ~~[illegible]~~ wskutek przyjęcia F wsk. [illegible]

~~[illegible]~~ Dowód jednoznaczności nie jest zatem ~~[illegible]~~ ważnym dla obszaru nieskończenie wielkiego; ~~[illegible]~~ uzupełnić w dalszym ciągu także poznamy rozmaite przykłady ruchów cieczy (Nr 1) które ~~wszystkie~~ zadość czynią warunkom $\lim_{\infty} u, v, w = 0$.
i nie wystarczy także podanie ich

Po drugie zauważymy że ~~w praktyce~~ ~~[illegible]~~ nie są dane prędkości na powierzchni obszaru lecz ciśnienie tam działające. ~~[illegible]~~ Nasuwa się zatem pytanie czy i kiedy ~~[illegible]~~ podanie tej jednej wielkości na miejscu owych trzech może ~~[illegible]~~ wystarczyć do określenia ruchu.

Odpowiedź stanowi ~~Objaśnia się to wskutek~~ twierdzenie, które zaraz udowodnimy, że:

Przy danym ~~rozkładzie~~ ciśnieniu w nieskończoności panującym istnieje tylko jeden rodzaj stałego ruchu „ruchu skończonego" w danym naczyniu.

Nazywamy ~~[illegible]~~ tutaj ruchem „skończonym" ~~[illegible]~~ ruch cieczy o skończonej prędkości i nie posiadający ~~przy którym~~ ~~[illegible]~~ ~~nie istnieją~~ żadnych takich linij prądu wyjątkowo w nieskończoności przebiegających. ~~[illegible]~~

~~Rozdzielamy sobie zatem~~ Rozdzielimy sobie zatem całą ciecz za pomocą włókien prądu ~~o przekroju $d\omega$~~ i zważymy że każde takie włókno możemy przeciąć (za pomocą przekroju $d\omega$ w skończonej odległości) możemy wnioskować że całkowita ilość cieczy $\sum V d\omega$ przez te przekroje

że wprawdzie w praktyce ruchów ściśle statecznych niema, ale przybliżenie stateczne ~~[illegible]~~

otrzymujemy łącząc naczynie z rezerwoarami ile możności dużemi

w których ~~gdzie~~ pewne dane ciśnienie panuje, że zatem:

f. W ogólności: albo u v albo odwrotnie dana [illegible] [illegible] [illegible].

Nie wykluczamy jednak bynajmniej ruchów o liniach prądu sięgających się do

nieskończoności.

4 Nasuwa się zatem pytanie, czy i kiedy podanie tej jednej wielkości t.j. rozkładu ciśnienia, na miejsce wszystkich trzech może wystarczyć do określenia teoretycznego ruchu.

podanie samego ciśnienia jest dostatecznem określeniem ruchu

Oczywiście nie ~~wystarczy ono~~ (w ogólnym przypadku, wystarczy zaś ~~[illegible]~~ ~~dopóki S skończone~~) ~~podanie~~ (jak łatwo poznać z później przytoczonego wzoru) ( ) podanie nacisku natężeń na przy--- ~~[illegible]~~ na powierzchni S dane ((~~dopó~~ jeżeli S skończone)) Te wielkości ~~[illegible]~~ jednak ~~[illegible]~~ nie są niezależne gdyż ~~[illegible]~~ spełniać muszą 3 równania typu

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Wystarczy też podanie u v w na niektórych częściach powierzchni S, a podanie natężeń na pozostającej części, co np. znajduje zastosowanie w razie cieczy ~~[illegible]~~ zawartej ~~[illegible]~~ w naczyniu (na ściankach u, v, w = 0) a poruszanej zapomocą sił stycznych wywieranych na powierzchnię (~~[illegible]~~ na powierzchnię).

§3. ~~[illegible]~~ W razie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ obszaru S nieskończonego zaś można fizycznie istotnego
Łatwo dowieść twierdzenia, którego słuszność krytyce ~~przykłady ruchów przedtem~~ wspomniane: **)
Dany układ ciśnień zatem ~~[illegible]~~ dozwolonych w nieskończoności i odległości powodować może
(tylko jeden ruch „skończony" (~~bez~~ punktów osobliwych). bez istotnych nieciągłości
„Skończonym" nazywamy tutaj taki ruch ~~który wszędzie~~ którego prędkości u v w nigdzie nie są nieskończenie wielkie

*) Ograniczamy się dla uproszczenia do przypadku u v w = 0 na ścianach
*) Tak samo też gdyby na ściankach u v w były danemi funkcjami.

**) jeżeli nie są nieskończenie wielkie!

Przy owym warunkom przyjęciu jednoznaczności odpowiada jednoznaczność odwrotnego zadania matematycznego, to znaczy

~~Przedstawienie sił hamowatyzowych~~ (prostsze ~~przypadki~~ przypadki $\frac{...}{q}$ = ...)

~~W ogólności są możliwe różne ruchy (pod wpływem ~~danych sił~~ danych~~ ~~układu cieczy~~ ~~ściśliwych~~ działających na powierzchnię w nieskończoności, ~~ale tylko jeden z nich będzie ruchem „skończonym".~~ nie może istnieć więcej niż jeden (który nie tylko wszędzie nie staje się nieskończenie wszędzie ale)

~~Ruchem~~ „Skończonym" nazywamy tutaj taki ruch dla którego całkowita ilość cieczy przepływającej ~~$\int V_n\, dS$~~, — której wszędzie bezwzględna wartość prędkości suma bezwzględnych ~~...~~ — (przez powierzchnię S) pozostaje skończoną gdy S ~~będzie~~ oddali się do nieskończoności

To znaczy: $\lim\limits_{\infty} \int (v_n)\, dS = G$ (2)

Pewien szczególny przypadek ruchu skończonego; odpowiadający właśnie przykładom na początku rozważanym ~~...~~ jest ruch który nazwać by można: kanałowym, mianowicie jeżeli ~~wszystkie~~ linie prądu ... ; żadna linja prądu nie przepływa ~~...~~ każde całkowicie w nieskończoną odległość. W takim razie bowiem (włókno prądu ~~...~~ taki przekrój ... ~~...~~) w tym obszarze, gdzie ~~...~~ znajduje się w skończonej odległości może zostać przecięte przekrojem q, tak że Σq będzie skończona; ~~...~~ dla tego też jeżeli prędkość wszędzie skończona, ilość przepływająca przez te przekroje $\Sigma(v_n)\, dq = \oint F$ będzie skończona, i z powodu stałości iloczynu $v_n\, d\omega$: $\lim\limits_{\infty} \int (v_n)\, dS \leqq 2\oint F$

W razie jeżeli nie ma linij prądu zamkniętych, lecz wszystkie idą z ∞ do ∞, będzie ważny znak równości. Przykład równania (18).

Ponieważ ~~Zważywszy, że~~ ~~$dS = r^2 d\omega$~~ kąt stożkowy $d\omega$ wycina element powierzchni $dS = \frac{r^2 d\omega}{\cos nr}$ wynika, że w ogólności prędkość v_n musi znikać w nieskończoności jak $\frac{1}{r^2}$ dla ruchu trzywymiarowego, dla dwuwymiarowego (skończonego) jak $\frac{1}{r}$; [wyjątek mogą stanowić pewne punkty osobliwe, jeżeli jednak dodatkowo przyjmujemy że w nieskończoności ~~linja prądu~~ nie

Czy jeżeli $u_\infty = v_\infty = \cancel{w_\infty} = 0$ $\quad p_\infty = 0$

nie musi samo przez się być ~~...~~ $\Sigma \nabla \omega$ = skończone? albo nawet = 0?

$$\overset{\parallel}{\psi}$$

$\psi = \alpha f(\beta) \cancel{+} \beta f(\alpha) + g(\alpha) \cancel{+} g(\beta)$

$\lim \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0$

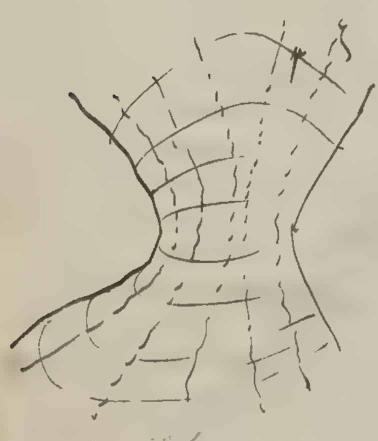
$\lim \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0$

Albo czy jeżeli ψ finite, nie wynika samo przez się że

$\lim u_\infty = v_\infty = 0$?

dla $\lim \rho = \infty$

$\Delta^2 p = 0 \quad \} \lim p_\infty = 0$



$\Delta^2 (\Delta^2 \psi) = 0$

zatem $\Delta^2 \psi$ albo sięga do ∞, albo kończy się na ~~...~~ ścianach

ponieważ $\lim \frac{\partial u}{\partial x} \dots = 0$

zatem też $\lim_\infty \xi = 0$ nie sięga do ∞

więc $\xi = \Delta^2 \psi$ zawsze kończy tylko na ścianach

ψ = Kraftfluss, Kraftlinien Anzahl (El. M)

In case when $\lim (u \, v \, w) = 0$ we have $\iiint \Phi \, dv = \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \, dx \, dy \, dz$!

$$\iiint \Phi \, dv = \iiint (\Delta^2 \psi)^2 \, dx \, dy$$

drgającą natężenia styczne tylko ~~normalne~~ ciśnienie (hydrostatyczne), to wynika że 4

prędkość wszędzie w nieskończoności musi być nieskończenie mała, bo z powodu skończoności 9

wielkości (musiałyby być oprzyjczone w każdym razie do)

$\mathfrak{S}$ skończone wartości prędkości ~~musiałyby tylko~~ (skończonej części ~~...~~ obszaru S,

a w ~~takim~~ razie ~~...~~ musiałyby istnieć podobne

a ~~...~~ ~~zniknięcie natężenia stycznych~~ ~~...~~ skończone dla co się sprzeciwia warunkowi $\lim = \infty$

ogólne ~~...~~ ~~prędkości~~ w nieskończoności ~~...~~ ~~przez warunek co do ciśnienia~~

~~wymagałoby~~ wogóle zniknięcia prędkości.

Pod temi założeniami ~~wogóle żaden ruch nie już ...~~ ani powolny ani szybki ~~...~~

~~...~~

$\lim_{\infty} p = 0.$ ~~...~~

Albowiem z Zasady ~~zachowania~~ energii wynika że praca wykonana przez ciśnienie

na powierzchnię i ~~przez siły zewnętrzne działające~~ musi ~~być równa~~ się równać

przyrostowi energii kinetycznej cieczy opuszczającej ów obszar i ~~funkcji~~ ilości

ciepła rozproszonej: (3)

$$\iint [(p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n) u + (p_{xy} l + p_{yy} m + p_{yz} n) v + (\quad) w]\, dS +$$

$$\cancel{\iiint (Xu + Yv + Zw)\, dx\,dy\,dz} = \iint (ul + vm + wn) \rho \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\, dS + \iiint \Phi\, dx\,dy\,dz$$

co łatwo także sprawdzić przez podstawienie wartości p_{xx} itd. i całkowanie

częściowe. W równaniu tym pod przyjętemi założeniami dla $\lim r = \infty$: znikają całki

powierzchniowe wskutek skończoności $\mathfrak{S}$, a zniknięcia natężeń i prędkości,

~~całka objętościowa z lewej strony wskutek $\iiint \frac{\partial U}{\partial x} u$ zamienia się w~~

$\cancel{\iint U (ul + vm + wn)\, dS + \iiint U \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz}$ co pociąga za sobą (4)

funkcja dyss. może mieć tylko wartości dodatnie.

$u = v = w = \text{const.}$ wskutek tego że ($\Phi = \ldots$

a zatem z powodu ~~zniknięcia prędkości~~ $\lim_{\infty} v = 0$ będzie ogólnie $u = v = w = 0$.

Przyjmując że $u\ v\ w$ są wszędzie ciągłemi funkcyami, <u>od 0 do ∞</u> (także w ∞), co jasno już wynika że dla $\lim_{\infty} u\ v\ w = 0$ także musi być $\lim\left(\frac{\partial u}{\partial x} = w\ i\right) = 0$ zatem $p_{xx} = p$ etc.

musi

4.15

~~Wypływa owo twierdzenie z ogólnego twierdzenia co do zachowania energii.~~

§4) Przedewszystkiem Udowodnić łatwo że w razie jeśli owe ~~ciśnienia~~ dotyczące ciśnienia ~~...~~ w nieskończoności, to żaden ruch skończony nie może powstać. Wynika to ze ogólnego równania co do zachowania energii, które nie opuszczając się obecnie do ruchów powolnych ~~...~~ możemy wyrazić w formie:

$$\iint \left[(p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n) u + (p_{yx} l + p_{yy} m + p_{yz} n) v + (\qquad) w \right] dS =$$

$$= \iint (u l + v m + w n)\, \rho \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\, dS + \iiint \Phi \, dx\, dy\, dz$$

który wynika z podstawienia p_{xx} i t.d. i całkowania częściowe przy użyciu równań. ~~do ...~~

Całki powierzchniowe ~~odnoszą się~~ obejmują do zewnętrznej powierzchni obszaru S) n. ~~...~~ ograniczającej ruch cieczy i wybuch) (do wszystkich powierzchni gdzie p_{xx}.. lub $u\, v\, w$ doznają nieciągłości.

Takich powierzchni jednak we wnętrzu cieczy lepkiej być nie może z oczywistych powodów mechanicznych, jedynie w pewnych punktach lub liniach ~~mogą powstać~~ ściany ~~...~~ nieskończenie tego rodzaju nieciągłości n.p. na krawędziach nieruchomych ostrych. ~~...~~

~~W takich punktach lub liniach~~ Wtedy musi (być) jednak ogólnie spełniony warunek że praca wykonana przez napięcia na powierzchnię otaczającą owe punkty lub linie zdąża do wartości zero, gdy ta powierzchnia ~~...~~ się skurcza do zero, gdyż krawędź czy ściana nieruchoma nie może wykonać żadnej pracy.

Tylko takie między możliwemi rozwiązaniami równań hydrodynamicznych mogą mieć bezpośrednie znaczenie fizyczne. (i to rozumiemy pod opracowaniem p. – do takich ... nieciągłości!) Otóż całki powierzchniowe odnoszące się do ścian naczynia oczywiście nie przyczyniają się do wartości pracy z powodu przylegania cieczy. Pozostają składniki

*) Rayleigh

To samo dla wszystkich

Wypływa toż równanie ogólniejszego równoważności przy wykonanej, przez ciśnienie na powierzchni cieczy dalszej ~~[?]~~ z (przyrostem energii kinetycznej, energią rozpróżnioną przez tarcie i z ~~[?]~~:

~~Wynika zatem że~~

Z tego wypływa wniosek, że w ogólności także pochodne $\frac{\partial u}{\partial -}$ będą tam nieskończenie małe, co zresztą także wynika ze skończoności $\iiint \Phi\, dv$

Rozważmy jeszcze zachowanie się cieczy w ∞.

W skutek tego w ogólności

$\lim p_{xy} = \ldots = 0$

$\lim p_{xx} = p_y - \ldots = -p$

Zatem wystarczy dla określenia ruchu w ogólności podanie jednej wielkości, t.j. wartości ciśnienia hydrostatycznego p w ∞, resztę kwestyi wszystkie powinno się objaśniają ~~[?]~~.

W dalszym ciągu ograniczamy się do ruchów „powolnych”, (ponieważ dla takich ~~dla których w statystyce~~ określonych systemu (1)) ważnem jest prawo superpozycji. ~~zasadniczo systemu~~

~~Gdyby istniały~~ Gdyby przy danym rozkładzie (zależności prz..) ~~[illegible]~~ „∞ panujących dwa różne ruchy „u” „u'” były możliwe, wtedy różnica u-u', v-v', w-w' musiałaby stanowić ruch ~~który co omawiany~~, wytworzony przez żadnego może ciśnienia, a zatem jak właśnie pokazaliśmy wszystkie znikające.

Zatem twierdzenie o jednoznaczności ruchów „skończonych” (   ) ~~w statystyce~~ przy podanym rozkładzie ciśnień w warunk. dowolnych jest udowodnionem.

(~~Powstawanie~~ Abstrakcyja ruchu sięgającego do nieskończoności ~~[illegible]~~ w ogólności przy pewnym skończonym ilości energii ~~[illegible]~~ tylko wtedy ma praktyczne znaczenie fizyczne jeżeli ruch ten pozostaje skończonym, ~~prakt~~ + Praktyczna doniosłość tego twierdzenia wynika z tego że)

Są wyjątki / kula w nieskończ. cieczy

Pytanie, czy jednak dla dowolnego rozkładu ciśnienia ~~[illegible]~~ (nieskończoności) w pewnem zacięgu zawsze ~~[illegible]~~ istnieje ~~taki~~ ruch statyczny, a w szczególności statyczny „skończony”, nie jest oczywiście załatwione * i nie będziemy tego także bliżej ~~[illegible]~~ rozstrzygać, tylko ograniczymy się do podania kilku przykładów.

albo czy oprócz skończonych przy danem p - istnieją także nieskończone ?

Ograniczymy się w tym rozdziale do ~~[illegible]~~ „powolnych" ruchów dwuwymiarowych. Rayleigh podał przykłady takich ruchów, powstających ~~wskutek drgań~~ we wnętrzu koła wskutek pewnego rozmieszczenia źródeł i wypływów na jego obwodzie. ~~Za podstawę~~ Punkt wyjścia stanowiła analogia tego zadania z drganiami płyty kołowej sprężystej, powodowana wspólnością równania którą także tutaj weźmiemy jako podstawę.

(5) $\Delta^2 \Delta^2 \psi = 0$ w obu przypadkach, ~~(w którym ψ oznacza funkcję prądu)~~ gdzie $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; ~~Weźmiemy tego samego równania jako podstawę~~. Dochodzimy do tego równania wskutek definicji „funkcji prądu" ψ: $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, i przez (6) różniczkowanie równania Ia według y, Ib według x. ~~Równania~~ ~~Te same równania przy wprowadzeniu pędu~~ Dla prędkości wirowania $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ~~przyjmują kształt~~ otrzymujemy $\zeta = \Delta^2 \psi$ (7) a równania I przy ~~większej tej~~ wprowadzeniu tej wielkości przyjmują kształt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (8)$$

wskazujący, że p i ζ są funkcjami sprzężonemi.

~~[illegible]~~ Zatem otrzymamy ogólne rozwiązanie stawiając $p + i\zeta = f(x+iy)$.

Najdogodniejszy sposób jest jednak wprowadzenie nowych zmiennych niezależnych $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$, i wskutek tego symbolów

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}\right); \quad \Delta^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \quad i \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0$$

zatem p lub ξ = potencyjalne $\quad \xi = \atop p = \int \frac{1}{r}\,dx\,dy$ mas leżących poza obszarem w którym ruch się odbywa, a zatem w ściankach

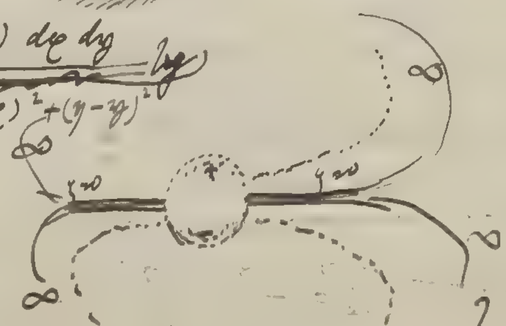
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\xi \qquad \text{wręc} \qquad \psi = \iint \xi\,\frac{dx\,dy}{r}\lg r = \int \frac{dx\,dy}{r}\int \frac{dx\,dy}{r}\lg r$$

$$\psi = \int \frac{d\xi\,d\eta}{\lg r_{x\ y}^{\ \xi\ \eta}} \int \frac{d\zeta\,d\theta}{r_{\xi\ \eta}^{\ \zeta\ \theta}}$$

aequivalente Oberflächenmittels! zatem można całkę odnieść do powierzchni sum.

$$\psi = \int_{<\delta} \frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \int_{>\delta} \frac{f(\zeta,\theta)\,d\zeta\,d\theta}{\sqrt{(\xi-\zeta)^2+(\eta-\theta)^2}}$$

Dlatego: ξ musi być $=0$ na
i w ∞



$\cancel{f(\zeta,\theta) = \sum \ldots}$

$\cancel{d\zeta\,d\theta = r\,dr\,d\theta}$

$\cancel{\int r^n\,dr\,\lg r}$

$$\lg\alpha = \lg r + i\varphi \qquad \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi$$

$$\alpha\beta = r^2$$

$$\beta\,d\alpha + \alpha\,d\beta = 2r\,dr$$

$$d\alpha = dr(\cos\varphi + i\sin\varphi) - r(\sin\varphi - i\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$r\,dr\,d\varphi = \frac{\beta\,d\alpha+\alpha\,d\beta}{2i}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{\beta\,d\alpha+\alpha\,d\beta}{2\alpha\beta}\right) = \frac{(\beta\,d\alpha)^2-(\alpha\,d\beta)^2}{4i\alpha\beta} \qquad = \frac{dr}{r}\frac{\alpha}{r} + i\frac{\alpha}{r}\,d\varphi \qquad \alpha = re^{i\theta},\ \beta = re^{-i\theta}$$

$$dr\,d\theta = d\alpha\,d\beta \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial\alpha} & \frac{\partial r}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} & \frac{\partial\theta}{\partial\beta} \end{vmatrix} \qquad r^2 = \alpha\beta \qquad \theta = \frac{\lg\alpha - \lg\beta}{2i}$$

$$= d\alpha\,d\beta \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \frac{1}{2i\alpha} & \frac{-1}{2i\beta} \end{vmatrix} = d\alpha\,d\beta\left(-\frac{1}{4i\sqrt{\alpha\beta}} - \frac{1}{4i\sqrt{\alpha\beta}}\right) = -\frac{1}{2i\sqrt{\alpha\beta}}\,d\alpha\,d\beta$$

$$r\,dr\,d\theta = -\frac{d\alpha\,d\beta}{2i}$$

16 13

pochodzące od części (powierzchni) S położonych wewnątrz cieczy. Wartości ich jest oczywiście mniejsze od iloczynu wielkości S (określonej w) i największej wartości natężeń p_{xx} etc. istniejących panujących na S. Te jednak dążą do zera gdy S oddalamy do nieskończoności, wskutek czego znika całka powierzchniowa z lewej strony równania, a podobnie z powodu ~~wskutek~~ skończoności ruchu całka z prawej strony.(22) Zatem funkcya dyssypacyjna Φ będzie zero, z czego z powodu ~~(v=0)~~ w nieskończoności wynika wszędzie $u=v=w=0$.

Dla ruchów powolnych (określonych równaniem ( )) do których znów się ograniczamy w dalszym ciągu prawo superpozycyi jest ważnem. Gdyby zatem przy danym rozkładzie natężeń przy (o skończonej wielkości) dwa różne ruchy skończone ($u\,v\,w$, $u'\,v'\,w'$) były możliwe, to wtedy różnice $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ musiałyby stanowić ruch wytworzony przez zniknięcie natężenia, a zatem jak wyżej pokazaliśmy, w ogóle znikający.

Zatem twierdzenie o jednoznaczności ruchów skończonych ( ) przez podanie rozkładu ciśnień w nieskończoności dostatecznych jest udowodnione.

W praktyce oczywiście tylko mamy do czynienia z ruchami skończonymi (~~przestrzennymi~~ razy kanałowymi), a rozwiązania „nieskończenie" duże ~~o danem ciśnieniu~~ reprezentują owe części przestrzeni w których dany jest rozkład ciśnień, czem przykład powyższy w §2 się objaśnia.

(redukujemy się w praktyce do ciśnienia normalnego p, przy czem ciśnienie ~~składowe~~ styczne $=0$)

$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot u \quad = 0$

22) Nie wiemy czy wszędzie musi być $\lim_{\infty} uvw = 0$ jeżeli ciśnienia są ograniczone.

Powstanie ~~Powstanie~~ ~~Istnienie~~ ruchu kardynalnego ~~płynu~~ .. wskutek (oporu w ∞ dalekiej części skończonych) wymaga w ogólności, ażeby naczyniu w którym ruch się odbywa, posiadało przekrój nieskończenie wielki. (w nieskończoności)

~~Od przekroju [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~
~~[illegible] [illegible] kuli (o promieniu R) [illegible]~~

Ażeby (pojęcie przekroju ~~[illegible]~~ ściślej określić) wystawimy sobie z początku współśrodkowych kulę o promieniu R i pod „przekrojem" jej rozumieć będziemy (oczywiście wyłączamy) który ~~przez~~ ciało nasze wycina z niej ~~[illegible]~~ wycina się.

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~Ruch obrotowy cieczy [illegible], przylegający do ścianek naczynia tylko nie istnieje, jeżeli energia [illegible] $\iiint \Phi d\omega$ nie jest zero.~~

~~[illegible]~~ (otóż wyobraźmy sobie że) ~~[illegible]~~ przekrój ~~[illegible]~~ $\lim_{\infty} S$ jest ~~[illegible]~~ skończonym. W takim razie ~~[illegible]~~ mamy dwie możliwości do rozważenia. Albo prędkości w nieskończoności są nieskończ. małe, wtedy praca cała wykonana przez ciśnienie jest nieskończ. mała więc według ( ) Φ musi zniknąć

~~i [illegible]~~
~~Albo prędkości w nieskończ. są skończone (nawet) wtedy także [illegible] [illegible] Φ [illegible] (wskutek [illegible]) istnieje [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] nie jest zero.~~
~~Wtedy nie $\iiint \Phi d\omega$ musi być [illegible] [illegible] [illegible]~~
~~[illegible]~~

~~I się przekonamy jednak~~ ~~[illegible]~~ Nie zgadza się z tym jednak, że w ~~takim~~ tym razie ~~Albo~~ Φ wskutek skończoności pochodnych $\frac{\partial u}{\partial x} \ldots$ wszędzie od zero się różni, zatem $\iiint \Phi d\omega$ musi być nieskończ. wielkie. Wynika więc konieczność przekroju $\lim_{\infty} S$ nieskończonego (z pominięciem możliwości pustki [illegible])

W takim razie „skończoność" ruchu wymaga, ażeby prędkość w nieskończ. była nieskończ. małą jak $\lim \frac{1}{R^2}$ w przypadku trójwymiarowym, a jak $\lim \frac{1}{R}$ w dwuwymiarowym (z możliwym wyjątkiem jakichś pewnych punktów osobl.)

Powolne ruchy dwuwymiarowe.

§5). Do ~~Przykłady~~ Ruchów dwuwymiarowych powolnych bez sił zewnętrznych ~~zostały~~ odnoszą się badania Stokesa (wahania poprzeczne walca), Margulesa, Riekego, (obrót zmienny między współosiowemi walcami), Lamba i Rayleigha (ruchy stacyjne).

Wzory podane przez Stokesa i Lamba dla ruchów zmiennych nie są ~~jednak~~ całkami najogólniejszemi

~~Podamy~~ Wyprowadzimy najpierw w krótkości rozwiązanie odnoszące się do stanu zmiennego z czasem powoli

Używając skrócenia $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ równania ruchu piszemy w formie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 u - \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \nabla^2 v - \rho \frac{\partial v}{\partial t}$$

które przez wprowadzenie funkcyi prądu ψ zapomocą relacyi: $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

zamieniają się w

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \text{czyli } \nabla^2 p = 0 \qquad \nabla^2 Z = 0$$

gdzie użyliśmy skrócenia $Z = -\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \nabla^2 \psi$

~~Równania~~ Z równań wynika że $p+iZ$ musi być funkcyą $x+iy$ której spółczynniki mogą oczywiście być funkcyami czasu, co oznaczamy

$$p+iZ = f(x+iy, t) = \varphi(x,y,t) + i\chi(x,y,t)$$

Wynika również $p = \varphi(x,y,t)$ a funkcya ψ określa się z równania

$$\chi = -\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \nabla^2 \psi$$

Można ψ rozdzielić $\psi = \psi_1 + \psi_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Dzięki temu (5) przyjmuje kształt: $\frac{\partial^4 \psi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} = 0$ (10)

i otrzymujemy rozwiązanie: $\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta)$ (11)

ponieważ zaś ~~[illegible]~~ wynikające z $\zeta = 4\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = 4[f_1'(\beta) + f_2'(\alpha)]$ (12)

(musi być wszystko ~~tak samo jak wirowość ζ~~ jako też wirowość ζ), przeto ~~[illegible]~~ jeżeli odtąd znak funkcyjny wyłącznie używać do oznaczenia funkcji rzeczywistej ~~musi być albo czysto rzeczywistą albo urojoną~~ ~~musi się przedstawić albo w formie~~ musimy mieć $\zeta = 4[f'(\alpha) + f'(\beta)]$, albo $\zeta = 4\frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i}$ (13)

$\psi = 4[f(\alpha) - f(\beta)]$ z

~~[illegible]~~ albo także sumę dwóch takich wyrażeń. To samo stosuje się do składników $f_3(\alpha) + f_4(\beta)$, które oczywiście przedstawiają superpozycję ~~dodatkową~~ zwykłego ruchu potencyjalnego.

~~Użyjemy~~ Użyjemy tej metody do skonstruowania ~~prawego~~ ruchu najprostszego należącego do typu „kanałowego", t.j. przepływu przez otwór w ścianie X.

~~[illegible]~~ Przyjmiemy formę (13 b) z odpowiednim ruchem potencyjalnym t.j.:

(14) $\psi = \frac{1}{i}[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)]$ z czego wypływają ~~[illegible]~~ prędkości:

(15) $v = \frac{1}{i}[\alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) + g'(\alpha) - g'(\beta)]$

$u = [+\alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) \mp f(\beta) \mp f(\alpha) \mp g'(\alpha) \mp g'(\beta)]$

Jeżeli f jest funkcją jednowartościową, łatwo znaleźć warunek ~~[illegible]~~ pod którym otrzymamy $u = v = 0$ przy ścianie $y = 0$: ~~Dla y=0 dla α=β musi być~~ Podstawiając mianowicie te warunki dla argumentów $\alpha = \pm\beta$ (co oznacza $y = 0$) ~~[illegible]~~ dojdziemy do relacyj:

wyc

$$\psi = \int d\xi\, d\eta\, \lg \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \int f(s)\, \lg \sqrt{(\xi-x_s)^2+(\eta-y_s)^2}\, ds$$

$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$, w skutek czego owe równania (15) zamieniają się w (16)

$$u = (\alpha-\beta)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$$
$$v = \frac{1}{i}\left[2\left(f(\beta) - f(\alpha)\right) + (\alpha-\beta)\left(f'(\alpha)+f'(\beta)\right)\right] \qquad (16)$$

Biorąc n.p. jakąkolwiek funkcyę $f = \alpha^n$ otrzymujemy ruch wody z warunkiem spoczynku przy ścianie $y=0$, ale takie ruchy jako „nieskończone" nie wiele przedstawiają interesu.

Obierzmy jednak: $f = \sqrt{\alpha^2-c^2} = \sqrt{(\alpha+c)(\alpha-c)} =$

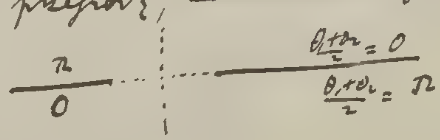
$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \;;\; f' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} \qquad (17)$$

gdzie $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ mają oznaczać promienie wodzące od punktu α do punktów $+c, -c$ wykreślone i kąty między niemi a osią X zawarte.

W prawdzie nie jest to ścisły funkcya jednowartościowa, ale obliczymy prędkości według (16) *):

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\theta\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad (18)$$
$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{4c^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

przekonywujemy się, że one istotnie znikają dla ściany $y=0$ sięgającej od $x=c$ do $x=+\infty$; i od $x=-c$ do $x=-\infty$; a przyjmując tę ścianę za nieprzekraczalną przegrodę, robimy funkcyę $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ jednowartościową jak wskazuje fig.



*) Przy tem użyto transformacyi: $\sqrt{\alpha^2-c^2} - \sqrt{\beta^2-c^2} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} =$

$$= (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}}\right] + c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2-c^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-c^2}}\right]$$

$$u = -4y\, n\, r^{n-1} \sin(n-1)\varphi \qquad = -n r^n \sin\varphi \sin(n-1)\varphi$$

$$v = -2 r^n \sin n\varphi + y\, n\, r^{n-1} \cos(n-1)\varphi = r^n \{ n \sin\varphi \cos(n-1)\varphi - 2 \sin n\varphi \}$$

Między punktami $+c$, $-c$ dla ~~przy~~ dkości wskutek $\theta = \theta_2 = 0$, $\theta_1 = \pi$ otrzymujemy $v = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$. Punkty $\pm c$ są także

i ψ_1 określić tak aby było:

$$\chi = \mu \nabla^2 \psi_1$$

wtedy
$$\nabla^2 \psi_2 - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0$$

Funkcja ψ złożona z dwóch części ψ_1 i ψ_2 zadość czyniących równaniom ( ) i ( ) stanowi
~~Równanie (~~ ~~stanowi~~ najogólniejsze rozwiązanie naszego zada[illegible].

§6). Podamy szczególne przykłady tylko w razie ~~przepływu~~ ruchu stałecznego, dla którego się upraszcza równanie

$$\Delta^2\psi = \xi$$

gdzie ξ jest prędkością wirowania $\left(= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ~~zadość czyniącą~~ spełniającą wirowania $\nabla^2\xi = 0$ a zatem też $\nabla^2\nabla^2\psi = 0$ [illegible]

Wynika zatem stąd że linie równego ciśnienia i wirowania tworzą system ortogonalny: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$ $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$p + i\xi = f(x+iy)$$

Rozwiązania ~~podstawiając~~ ~~[illegible]~~ przyjmują jednak formę najdogodniejszą przy użyciu zmiennych niezależnych $\alpha = x+iy$; $\beta = x-iy$, i wskutek tych symbolów:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\ ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\ ; \quad \Delta^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$$

Dzięki temu podstawieniu (5) przyjmuje kształt: $\frac{\partial^4\psi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}=0$

i otrzymujemy rozwiązanie: $\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta)$

ponieważ zaś $\xi = 4\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = 4(f_1'(\beta) + f_2'(\alpha))$. ~~[illegible]~~ musi być rzeczywiste

więc) musimy mieć ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ jedno z dwóch rozwiązań typu:

jeśli znakiem f odtąd oznaczamy funkcję rzeczywistą)

W ogólności wystarczy zatem dla określenia ruchów stacyjnych jednoznacznie podanie jednej wielkości, t.j. rozkładu ciśnienia hidrostatycznego p, które działa ~~dostającego~~ w nieskończonej odległości, co objaśnia kwestyę na początku poruszaną.

Ruchy dwuwymiarowe.

§6). Zdaje się, że ~~prócz~~ „transpiracya" cieczy między płaszczyznami równoległymi, (ruch cieczy wirującej) ~~...~~ między walcami współosiowymi i pewne ruchy wewnątrz koła, badane przez Rayleigha metodą źródeł i wypływów*) są jedyne dotychczas bliżej poznane przykłady ~~...~~ /dwu- sądzę że wymiarowych ruchów stacyjnych cieczy lepkiej. Wobec tego podane poniżej przykłady innych takich ruchów ~~...~~ na uwagę zasługują, zwłaszcza ponieważ są to najprostsze (~~jako~~ przedstawiciele ruchów sięgających do nieskończoności.

Podamy przedewszystkiem pewną formę ogólnego rozwiązania równań w razie ruchu dwuwymiarowego. ~~[Wskutek wprowadzenia funkcyi prądu ψ zapomocą relacyi:~~ $\cancel{u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}}$ ~~przeto]~~ Równania dynamiczne (   ) wskutek nieściśliwości cieczy można napisać w formie

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (4)$$

~~Ciśnienie~~ Relacya (13) daje nam wartość ciśnienia:

$$\xi = \frac{8\pi}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad = \frac{4}{i}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}}\right\} \tag{19}$$

a z tego otrzymujemy ciśnienie jako funkcyę sprzężoną:

$$p = \frac{8\pi}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \tag{20}$$

~~Punkty $+c$, $-c$ dla tych funkcyj są osobliwe~~; w nieskończoności znika ξ, ~~przy~~ ponieważ ~~otrzymuje~~ $\lim_{r=\infty}\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = 0$, ~~otrzymuje wartość~~ powyżej ~~ściany~~ ściany, poniżej ściany zaś

$$\lim_{r=\infty}\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = \pi .$$

Z tej samej przyczyny $\lim_{r=\infty} p = \pm 2$ ~~...~~ zależnie czy punkt znajduje się powyżej czy poniżej ściany. ~~Stanowi to zatem~~ Różnica ciśnienia po obu stronach przegrody, ~~...~~ powodująca ruch, wynosi zatem 4 jednostek, ~~...~~ dla innej wartości tej różnicy należałoby tylko wszystkie prędkości w odpowiednim stosunku zmienić. Ilość cieczy przepływającej przez otwór wynosi:

Ponieważ dla prędkości między punktami $\pm c$ wtedy $\varphi = \theta_2 = 0$; $\theta_1 = \pi$ otrzymujemy $v = 4\sqrt{c^2-x^2}$ przeto

$$F = 8\int_0^c \sqrt{c^2-x^2}\,dx = 2c\pi$$

albo w zależności od czynnej różnicy ciśnienia Δp:

$$F = \frac{\Delta p \cdot c\pi}{2}$$

Pozostaje do rozważania rozkład prędkości w nieskończoności i w otoczeniu punktów osobliwych $\pm c$:

Dla punktów w oddaleniu z ~~...~~ można stawić:

$$\lim\left[\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] = -\frac{c^2}{2}\lim\left[\frac{\frac{\theta_1-\theta}{c} - \frac{\theta-\theta_2}{c}}{c}\right]$$

$$= -\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

$x = \cos\varphi$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$\Delta p = 4$

A). $\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)$ B). $\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)\right]$

$\xi = 4\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]$ $\xi = \frac{4}{i}\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right]$

$p = 4\mu \frac{\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]}{i}$ $p = \frac{4}{\mu}\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]$

albo też sumę dwóch takich funkcyj, a ponadto superponuje się jeszcze wskutek składników f_3, f_4, wszystkich ruch potencyalny wyrażony przez

C). $\psi = g(\alpha) + g(\beta)$ lub D). $\psi = \frac{1}{i}\left[g(\alpha) - g(\beta)\right]$

~~Częstość do rozpatrzenia~~ ~~Ale~~ Z wszystkich tych mogą być ~~wyjęte~~ ~~ruchy~~ owe poruszenia gdzie prędkości $u=v=0$, ~~dla~~ a równanie ich ~~wyrażone~~ ~~ma~~ wyrażone w formie

$$u^2+v^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0.$$

§7. Zadanie żeby znaleźć ruch przy danym kształcie ścian) odpowiedni, nie jest jednak rozwiązane i nawet nie ~~ściany~~ ~~są~~ znany kryteryum pod jakiemi warunkami ruch statyczny jest możliwy przy danym kształcie ścian wogóle

A już Stokes podał przykład ~~ruchu~~ niedopuszczający rozwiązania ~~stacyonarnego~~: ruch cieczy około ~~walca nieskończonego trzymanego prostopadłej do kierunku~~ osi prędkości jedno jeśli sobie w przód jednostajny o prędkości C ~~w kier~~ wyobrażamy walec nieskończony trzymany prostopadle. Podczas gdy dla kuli ~~Łatwo~~ i ~~naszą metodą możemy udowodnić że~~ w analogicznym przypadku istnieje znane rozwiązanie, to tutaj jedyne możliwe rozwiązanie jest $u=v=0$, więc walec

~~a zauważymy że~~ (: $\sin\theta = \frac{y}{r}$ otrzymanym przez różniczkowanie całego)

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = - \frac{y}{r^2} \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$ a zatem, zważywszy że jest to bardzo

małą wielkością:

$$\lim u = +4c^2 \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r}$$

$$\lim v = -2c^2 \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r} + \frac{4c^2\sin\theta}{r} = \frac{4c^2}{r}\sin^3\theta \qquad (22)$$

~~Zatem prędkość znikają w nieskończoności. Kierunek ruchu w większej odległości od otworu jest dany~~ We większej odległości od otworu ciecz płynie zatem w kierunku promieni, z prędkością $V = \frac{4c^2\sin^2\theta}{r}$, znikającą w nieskończoności. Równania (22) ~~przedstawiają~~ można ~~zatem~~ też uważać za określenie wypływu z ~~otworu~~ bardzo małego źródła na ścianie $y=0$. Otrzymałoby się to samo rozwiązanie bezpośrednio z równań (16) podstawiając: $f = \frac{c^2}{2}\frac{1}{\alpha}$; ale ten sposób nie objaśnia (zachowania się cieczy w bliskości punktu osobliwego $r=0$. ~~przedstawiają wypływ~~ (23)

Wynika (stąd równocześnie) ~~z tego~~:

$$\xi = -\frac{2c^2}{} \frac{\sin 2\theta}{r^2} \qquad \psi = c^2(2\theta - \sin 2\theta) \qquad (24)$$

$$p = -\frac{2c^2}{} \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

co również z równań (19) (20) wypływa, za pomocą rozwinięcia $\lim \log\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 \log y}{\partial x^2}$

$$= -\frac{c^2}{2}\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}$$

Przyjmując pewien rozkład źródeł i wypływów na ścianie $y=0$ otrzymałoby się wypadkowy ruch przez sumację czyli też całkowanie wyrażeń w rodzaju (22) zgodny z warunkiem spoczynku przy innych częściach ściany, za pomocą odpowiednio stałemi.

Równanie to jest identyczne z przypadkiem rozwiązania otrzymanem przez Rayleigha dla cylindra na obwodzie koła, jeżeli się ograniczamy do ~~[illegible]~~ bezpośredniego (niemal blizkiego) otoczenia tego cylindra (wzór 22' Rayleigha

zgodny z warunkiem $\lim u = 0$, $\lim v = 0$ (10

22

Łatwo też naszą metodą udowodnimy że ~~[illegible]~~ ruch „~~skończony~~ ~~[illegible]~~" jest niemożliwy.

Zauważymy najpierw ~~[illegible]~~ co do funkcyj φ, ψ, że dla ruchów skończonych nie mogą one posiadać punktów osobliwych w obrębie cieczy wypełnionym (3)

~~bo w takim razie~~ w ogólności ~~innej być prędkości~~ ~~musiałyby być~~ ~~nie byłyby wszędzie skończone~~. więc φ i ψ [illegible] ~~[illegible]~~ obrać tylko do ruchów skończonych takie funkcye φ, które posiadają punkty osobliwe w obrębie reprezentowany przez ścianę naczynia. (~~lub ewentualnie na jego brzegu~~) Ale to [illegible]

Jeśli ściana ~~jest reprezentowana przez koło~~ ma kształt walca, czyli jeśli przekrój ściany z płaszczyzną XY jest kołem, możemy zatem f rozwinąć w szereg:

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

a dodamy analogiczną funkcyę potęgową [illegible]

Z powodu symetryi ruchu względem osi X musimy zastosować równanie A

z których wynika

$$u = \Sigma$$

$$v = \Sigma$$

czyli ~~składające się~~ składowe prędkości w kierunku promienia wodzącego r i prostopadłe.

$$V_r =$$

$$V_\theta =$$

Dla powierzchni koła $r = R$, ~~[illegible]~~ obie składowe prędkości muszą zniknąć, z czego wynikają relacye

które są sprzeczne ze sobą z wyjątkiem jeśli wszystkie prędkości w całym obszarze

23

Aby zbadać wobec ruch w otoczeniu bezpośrednim punktów ~~±~~ c rozwińmy funkcye (18) przy użyciu relacyi

$r \sin\theta = \eta = r_1 \sin\theta_1$; $r\cos\theta = c + \xi = c + r_1 \cos\theta_1$;

Tak otrzymujemy, pomijając wielkości wyższych rzędów: ~~przy ograniczeniu się do wyrazów rzędu pierwszego~~

$$u = + 4\sqrt{2c}\,\sqrt{r_1}\,\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} \tag{25}$$

$$v = 4\sqrt{2c}\,\sqrt{r_1}\,\sin^3\frac{\theta_1}{2}$$

co dowodzi, że prędkości w ~~punktach~~ „matematycznie ostrych" końcach krawędzi $\pm c$ nie ~~stają się~~ są nieskończoną jakby na pozór sądzić można z (18) i jak by ostatnio musiałby być w cieczy idealnej, lecz przeciwnie, są zero.

To samo rozwiązanie (25) otrzymuje się z równań ogólnych (16) podstawiając: $f = \sqrt{2c}\,\sqrt{\alpha}$ (26)

i przedstawia to przepływ cieczy nieskończonej na około krawędzi matematycznie ostrej.

Linije prądu wynikają z funkcyi prądu ψ oznaczonego według (14, 16): (27)

$\psi = -\frac{8}{3}\sqrt{2c}\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right]^3$ jako parabole współogniskowe z punktem $+c$. fig.

Wirowanie i ciśnienie ~~[illegible]~~ wynika z 13:

$$\zeta = -\frac{4\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad p = -\frac{4\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{28}$$

W punkcie c funkcye te są nieoznaczone, a znikają w nieskończoności.

Podczas gdy ruch (18) i z nim spokrewniony (22) były ruchami i dla tego jedynie takiemi ruchami możliwemi przy danej ciągłości cieczy w danem zasypaniu skończonemi (zwyczajnie Kandowemi) otrzymany tutaj do czynienia z ruchem nieskończonym ~~jak [illegible] funkcyi~~ $\psi = \infty$ dążącą do $\lim_{r\to 0}\psi = \infty$ w tym przypadku ~~[illegible]~~ mającą

czy energia wspólnona równania $\int$ po dS

czy punkt osobliwy ± 1 nie przyczynia się?

Ogólnie rozwiązanie dla takich punktów?

§ Superpozycja [illegible] potencjalny $\psi_0 = \frac{V\alpha - V\beta}{i}$ można otrzymać przepływ dookoła przegrody parabolicznej $y^2 = 4a(a+x)$, mianowicie:

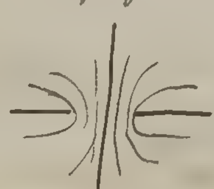
$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{\theta}{2}\left[r \sin^2\frac{\theta}{2} - a\right]$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{\theta}{2}\left[r \sin^2\frac{\theta}{2} - a\right]$$

Ale na tych ścianach ogólnie powstaje prawo przy styczne. zatem $\frac{\partial v}{\partial n}$ nie jest ciągłe

warunek: u, v, w i pochodne pierwsze z nich wszędzie ciągłe z wyjątkiem na ścianach

Wtedy możliwy jest także ruch symetryczny warunek $u = v = 0$ (to $= c$?) przy ścianach ~~[illegible]~~ $y = 0$ i [illegible] tego [illegible] gdzie indziej n.p. ściana $x = 0$!



Czyby wynikało że $\lim_{\infty} p$ dla innych ruchów nie może być $\neq c$? lub że ruch statyczny niemożliwy?

nieskończonym są równe zero — co właśnie wyprowadza ~~[illegible]~~ niemożliwość rozwiązania skończonego z warunkami granicznymi $h = u = c$.
$\xi = v = 0$

24

Jeśli użyjemy teraz dla cieczy lepkich w naszym przypadku metody analogicznej do tej, którą (użyczono w hidrodynamice i elektr.: aczkolwiek dała przykłady niedostateczne) przyjmowania pewnych funkcyj f i g i dostosowania odpowiednich warunków granicznych t.j. ścian stałych za pomocą relacyj —, to przekonamy się że tylko w wyjątkowych razach otrzymamy ruch skończony wobec wśród ścian nieograniczonych.

Dla tego przykłady następujące (odnoszące się do ruchów ~~[illegible]~~ wobec mniej ścian płaskich) ~~[illegible]~~ mogą przedstawiać pewien interes.

Szukamy przedewszystkiem najprostszego ruchu typu kanałowego: t.j. przepływu przez otwór w ścianie X

qui corresponde à une certaine forme donnée des parois

12

Istotnie przedstawia to ruch ~~...~~ spełniający warunki $\lim_{\infty} u, v = 0$ $\lim_{\infty} p = 0$

i jako taki nie może być skończonym według ...

a do ~~...~~ określenia jego nie wystarczają owe warunki. ($\lim u = v = 0$ przyjmowane ~~...~~)

Zatem też znaleźć ~~inne~~ odmienne ruchy niektórymi spełniające ten samy warunek, $\lim_{\infty} p = 0$; n. p.

przyjmując formę: ~~$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i}$ i postępując analogicznie~~

~~jako przez (14) otrzymuje się wskutek podstawienia~~ $g' = 0$ $f = \frac{1}{\alpha}$:

$$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta) = (\alpha+\beta)[f(\alpha) + f(\beta)] - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) + g(\alpha) + g(\beta) \qquad (29)$$

i postępując analogicznie jako wobec (14) znajduje się ~~dla funkcyj jednowartościowych~~

formułki:
$$u = i\left[2\left(f(\alpha) - f(\beta)\right) + (\alpha - \beta)\left(f'(\alpha) + f'(\beta)\right)\right] \qquad (30)$$
$$v = (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$$

które przyjmujemy dla funkcyj jednowartościowych spełniają warunki $u = v = 0$ przyświadczonego

Podstawiając tutaj: $f = \sqrt{\alpha}$ otrzymujemy:

$$u = -4\sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$v = -4\sqrt{r}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (31)$$
$$\psi = 8\sqrt{r^3}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4y\sqrt{r - x}$$
$$p = -\frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\zeta = \frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

co przedstawia przepływ cieczy wzdłuż krawędzi ostro zakończonej:

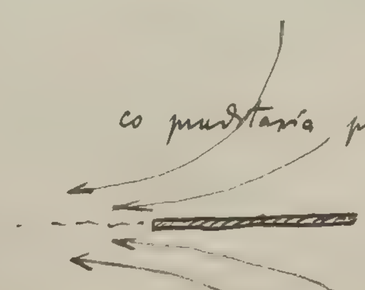


fig.

Kształt linij prądu: $cx = y^2\left[y^2 - \frac{c^2}{4y^4}\right]$

~~† Przez superpozycję (31) i (25) otrzymuje się przepływ koło krawędzi ścian schodzących się pod kątem:~~

~~a może też pod dowolnym kątem za pomocą superpozycji większej ilości podobnych n.d.?~~

Podobnie jak (25) tworzy poniekąd specyalizacyę rozwiązania (18), tak samo

Tośnie omawiany ruch (31) można uważać za specyalizacyę ruchu, który się otrzymuje z równań (30) przez podstawienie $f = \frac{\cancel{\dots}}{\sqrt{a^2-c^2}}$, mianowicie:

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - 4\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

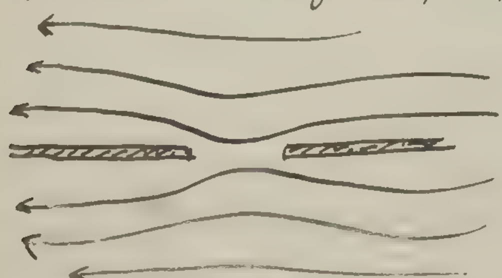
$$\psi = \cancel{4 r\sqrt{r_1 r_2} \sin\theta \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad ?$$

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{i} = \frac{a}{\sqrt{x^2-c^2}} \cdot \frac{f}{\sqrt{\dots}} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$p = 8\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \tag{32}$$

$$\xi = 8\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

Jest to oczywiście także ruch „nieskończony", odpowiadający ~~ruchu~~ przepływowi cieczy wzdłuż ściany ~~...~~, zaopatrzonej otworem, z warunkiem $\lim_{\infty} p = 0$.



Przez superpozycyę ruchów takich rodzajów możemy rozwiązać zadania więcej skomplikowane n.p. zapomocą superpozycyi ruchów (18), przemieszczonych ~~każdego~~ stopniowo w kierunku x otrzymujemy przepływ przez system szpar, lub przez „kratę". Wynika, że (cała) ilość przepływającej ~~...~~ (przez) daną różnicę ciśnienia Δp przez 1cm długości będzie ~~...~~ $F = \frac{n c^2 \pi}{2} \Delta p$ ~~...~~ gdzie n oznacza ilość szpar (na 1cm długości) c ich szerokość. Zatem nawet jeśli przegrody będą nieskończenie wąskie,

dla każdej

ostateczna wolna przestrzeń zawierała

Wolno superponować, ale nigdy tak aby (ściany jednej przykładu ~~[illegible]~~

to w tych miejscach powstałyby bardzo wysokie $\frac{\partial u}{\partial x}$ ...

lub natężenia pary

wykonującej pracy

tak że $nc = 1$ to przepływie skończona ilość :

$$F = \frac{c\pi}{2}\Delta p = \frac{\pi}{2n}\Delta p$$

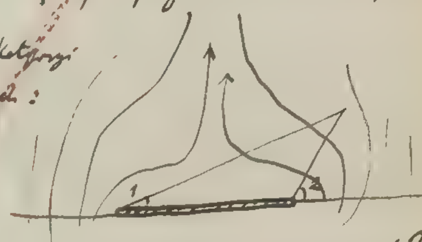
więc krata taka wywiera opór (o gęst. cienkich przegrodach) $\frac{\Delta p}{F} = \frac{2n}{\pi}$ proporcyonalny do ilości przegród.

Podobnie, superponując dwa równania rodzaju (25) o przeciwnym kierunku (ściany), przesunięte względem siebie na osi X, otrzymuje się przepływ naokoło przegrody płaskiej w cieczy nieskończonej, który jednak należy do kategoryi ruchów nieskończonych:

$$u = \sqrt{r_1}\,\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} - \sqrt{r_2}\,\cos^2\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$v = \sqrt{r_1}\,\sin^3\frac{\theta_1}{2} + \sqrt{r_2}\,\sin^3\frac{\theta_2}{2}$$

i.t.d. $p =$



(33)

Zajmujące jest porównanie ruchów (18) i (25) z odpowiedniemi ruchami o symetryi osiowej, zbadanemi przez Sampsona*) ~~Ruch~~ w przekroju osiowym. Linie prądu są hyperbolami współogniskowemi, jeżeli ściana jest płaszczyzną ~~płaską~~ z otworem (lub hyperboloidą obrotową). W bliskości krawędzi otworu (~~...~~) (odległości h) funkcya prądu

$$\psi = \frac{-Vh^2\varrho^3}{3},$$

gdzie ϱ oznacza pierwiastek hyperboliczny równania (według λ) $\frac{x^2}{\lambda^2-1} + \frac{y^2}{\lambda^2} = h^2$

staje ~~...~~ się identyczną z funkcyą prądu (27) i hyperbole degenerują w parabole.
W bardzo wielkiej odległości zaś od otworu otrzymujemy wzory identyczne z ~~trzywymiarowe~~ formułkami analogicznemi do (22), przedstawiającemi trzywymiarowy wypływ z źródła w ścianie płaskiej:

*) Phil Trans 182, (1892)

$$x^2\lambda + z^2\lambda - z^2 = h^2(\lambda^2 - \lambda)$$

$$h^2\lambda^2 - \lambda(h^2 + x^2 + z^2)$$

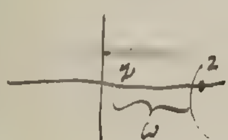
$$\frac{x^2}{\lambda - 1} + \frac{z^2}{\lambda} = h^2$$

$$\lambda^2 \cancel{} - \lambda\,\frac{(x^2+z^2+h^2)}{h^2} + \frac{z^2}{h^2} = 0$$

$$\lambda = \frac{h^2+x^2+z^2}{2h^2} \pm \sqrt{\cdots}$$

$$\varrho = \frac{h^2 + x^2 + z^2}{2h^2} - \sqrt{\left(\frac{x^2+z^2}{2h^2}\right)^2 - \frac{z^2}{h^2}}$$

$$x = \cancel{}\ h + \xi$$



$$\varrho = \frac{2h^2 + 2h\xi + \xi^2 + z^2}{2h^2} - \left[\left(\cancel{1} + \frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2 + z^2}{2h^2}\right)^2 - \frac{z^4}{h^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2 + z^2}{2h^2}\right]\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{z^4}{h^4}}{\left(1 + \frac{\xi}{h}\ \right)^2}\right.\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad h^2 = -c^2$$

$$\frac{1}{3}\nabla c^2 \rho^3$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2+1} - \frac{z^2}{\lambda^2} = c^2$$

$$x^2\lambda^2 - z^2\lambda - z^2 = c^2(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\lambda^4 + \lambda^2\left(\cancel{1} - \frac{x^2+z^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z^2 - x^2}{c^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\cdot\cdot\quad)^2 - \frac{z^4}{c^4}}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{z^2}{c^2} = \mu^2\varrho^2$$

$$\cancel{u=\frac{3y}{2r^5}}\qquad \cancel{v=3x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{3xy^2}{2r^5} \\ v &= \frac{3y^3}{2r^5} \\ w &= \frac{3xz^2}{2r^5} \end{aligned}\right\} \qquad p = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \qquad (34)$$

Zaznaczę jeszcze że wypływ dwuwymiarowy z źródła w przestrzeni między ścianami prostopadłemi stykającemi się w źródle dany jest przez funkcyę

$$\psi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2\cos 2\theta$$

$$u = \frac{2\sin 2\theta\cos\theta}{r} \qquad (35)$$

$$v = \frac{2\sin 2\theta\sin\theta}{r}$$

$p =$

A z tego przez superpozycyę wed (22) można otrzymać wypływ z źródła w przestrzeni między ścianami stykającemi się pod dowolnym kątem $\alpha = \operatorname{arctg} a$: $\alpha < \frac{\pi}{4}$!

$$u = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[\cos\theta - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\theta\right] = \frac{\sin\theta\cos\theta\,\cancel{\cos\theta}\,\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\; r} \qquad (36)$$

$$v = \frac{\sin^2\theta}{r}\left[\cos\theta - a\sin\theta\right] = \frac{\sin^2\theta\,\sin(\alpha-\theta)}{r\sin\alpha}$$

Prędkość wypadkowa, skierowana wzdłuż promienia wodzącego: $V = \frac{\sin\theta\left[\cos\theta - a\sin\theta\right]}{r}$

$$= \frac{\sin\theta\,\sin(\alpha-\theta)}{r\sin\alpha}$$

Ale tu zachowanie się w punkcie 0 jest inne [illegible]

$\nabla^2 u = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7}$

$-\frac{5y^2x}{r^7} - \frac{10y^2x}{r^7} + \frac{35x^3y^2}{r^9}$

$\frac{2xy}{r^5} - \frac{5xy^3}{r^7}$

$+\frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7} - \frac{15xy^2}{r^7} + \frac{35xy^4}{r^9}$

$+\frac{2x}{r^5} - \quad " \quad "$

$\frac{4x}{r^5} - \frac{35xy^2}{r^7} + \frac{35xy^2}{r^7}$

$\frac{4x}{r^5} - \frac{30xy^2}{r^7}$

$\lambda^2 = tg\,\varphi - \lambda^2 tg\,\varphi$

$\lambda^2 = \frac{tg}{1+tg}$

$-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$

$\left(\frac{z}{x}\right)^2 = + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = tg^2\varphi = \frac{-\varphi^2}{1-\varphi^2}$

$\frac{3x}{r^5} - \frac{15xy^2}{r^7}$

$\varphi^2 = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} = \sin^2\varphi$

$= \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$

$\varphi = \sin\varphi = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$d\varphi = \cos\theta\, d\theta$

$-\frac{5xy^3}{r^7}$

$-\frac{10y^3}{r^7} + \frac{35xy^3}{r^9}$

$\frac{3y^2}{r^5} - \frac{5y^4}{r^7}$

$\frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7} - \frac{20y^3}{r^7} + \ldots =$

$\frac{6y}{r^5} - \frac{10y^3}{r^7} \quad \Big\| \quad -\frac{3y}{r^5} + \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^9}$

$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{1}{w}$

$\frac{1}{r^3} + \frac{x^2}{r^5}$

$-\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r}\right) = + \frac{xz}{r^3} = u_x$

Zauważę że ruch ( ) tak samo jak ruch ( ) znajduje się jako forma graniczna ~~p~~ pomiędzy ruchami badanymi przez Rayleigha; otrzymuje się go z wzoru 33' ~~z~~ loc. cit. ~~[illegible]~~ robiąc promień koła, w obrębie którego ruch się ma odbywać, nieskończenie wielki.

Z drugiej strony zajmujące jest porównanie ruchów z odpowiednimi ruchami o symetrii osiowej, zbadanymi przez Sampsona.*)
Jeśli ściana płaska jest ~~[illegible]~~ zaopatrzona otworem kołowym, ~~autor ten dowodzi, że~~ możliwy jest ruch, którego linie prądu (w przekroju osiowym) są hiperbolami ~~współosiowemi~~ współogniskowemi. Funkcja prądu jest określona przez: $\psi = \frac{V c^2 q^3}{3}$
gdzie V oznacza prędkość jej w środku otworu, c ~~jest~~ średnicę otworu, q pierwiastek spółrzędną hiperboliczną punktu x, y, to znaczy hiperboliczny równania dla λ:

$$\frac{x^2}{1-\lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2} = c^2$$

W bezpośrednim otoczeniu krawędzi otworu ~~[illegible]~~ hiperbole degenerują to jest w odstępach małych w porównaniu z ½ średnicą ~~otworu~~ w parabole i ruch ( ) okazuje się istotnie identycznym z tutaj badanym (§9).
~~Dla~~ bardzo wielkiej zaś odległości od otworu otrzymujemy ~~[illegible]~~ z równań Sampsona wzory przedstawiające trójwymiarowy wypływ z źródła w ścianie płaskiej:

---

*) Phil. Trans. 182 p. 449

$\lambda = 2/3$

Na przykładzie §   można łatwo pokazać że istnieją także inne ruchy

zadości czyniące tym samym warunkom granicznym t.j. ~~[illegible]~~

t.j. danemu kształtowi ścian i danemu rozkładowi ciśnienia w ∞ przy

, ale ~~[illegible] mogą to być tylko ruchy [illegible]~~ z pomiędzy nich tylko

ów ruch   będzie stacjonarnym

Przyjmiemy np. formę $\varphi =$

i postępujemy analogicznie jak w ~~[illegible]~~

Znajdujemy tak rozwiązanie u, v które przy ograniczonej dla funkcji

jednowartościowych będzie określać ruch w dziedzinie ściany nieruchomej zas.

Podstawiając tutaj $f = \sqrt{1-c^2}$ otrzymamy (32)

Jest to ruch spełniający warunek $\lim \varphi = 0$ i mogłoby go superponować nad

.... ale należy on do klasy ruchów nieskończonych gdyż $\lim \varphi = \infty$

~~[illegible] [illegible] się także Postępując podobnie jak w~~

~~[illegible] otrzymamy ruch ... wytworzony przez~~

Jeśli podobnie jak w §   zbadamy rodzaj tego ruchu w otoczeniu p[illegible]

+1 otrzymamy wzory (31) które również można otrzymać bezpośr[illegible]

(30) przez podstawienie $f = N\alpha$

Przedstawia to przepływ ~~[illegible]~~ stycznie cieczy wzdłuż krawędzi ostro zakończonej ~~[illegible]~~

Kształt

[Linii prądu ~~[illegible]~~ określony przez równania $cx = y^2 \ldots$]

Superponując to rozwiązanie ponad odpowiednie §   [otrzymalibyśmy wzory

(pomijamy już odpowiednie stałe)

odpowiadające przepływowi cieczy koło krawędzi, z dowolną składową styczną i normalną.

Fig. przedstawia np. ruch ~~...~~ określony przez

$$\psi = \sqrt{r}^{3} \sin^{2}\frac{\theta}{2}\left[a \sin\frac{\theta}{2} + b \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

pod założeniem $a =$ b

Ażeby precyzyjnie zbadać ruch (32) w wielkiej odległości możemy użyć tych samych ~~...~~ rozważań jak w ..

~~Otrzymujemy tym sposobem ruch odpowiadający~~

~~czyli~~, odpowiadający równoczesnemu całkowitemu prądowi $\int_{-1}^{+1} u\,dx = 2\pi$ w otworze ~~...~~

i opuszczając składnik $u = c y$, ~~przedstawiający~~ jako ~~...~~ obojętny dla nas dodatek .... potencyalnego, otrzymujemy wzory

(35)

~~...~~ Przedstawiają one ruch ~~...~~ powstający w obrębie półprzestrzeni ~~...~~ na miejsce jednego elementu ściany X ~~...~~ wskutek istnienia prądu stycznego ~~...~~ w punkcie 0.

Z drugiej strony można to też interpretować jako ruch wzbudzony w przestrzeni zawartej między ścianami prostopadłemi, wskutek obecności źródła o natężeniu .... w punkcie przecięcia.

$$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$$

$$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \sqrt{\alpha^2-c^2} = \frac{c^2}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} \qquad g = \log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-c^2})$$

$$\alpha \mp \sqrt{\beta^2-c^2} + \beta\sqrt{\alpha^2-c^2}$$

$$-\alpha f(\alpha) \quad -\beta f(\beta)$$

$$v = \cancel{f(\alpha)+f(\beta)} + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + \cancel{f(\alpha)+f(\beta)}$$

$$u = \frac{1}{i}\left(\cancel{\beta f(\alpha)+\alpha f(\beta)} \mp \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + \cancel{f(\alpha)+f(\beta)}\right)$$

$$-\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta)$$

$$\cancel{f(\alpha) + \alpha f(\alpha) + f(\alpha)} = 0$$

$$\left[\cos\theta - \frac{c^2 \cos\theta \sin^2\theta}{r^2}\right]$$

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta \; \cancel{\cos\left(\frac{c^2 \ldots}{r^2}\right)} - \sqrt{r_1 r_2}\; \cancel{\sin\theta\left(\theta - \frac{c^2 \sin\theta\cos\theta}{r}\right)}$$

$$v = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\theta\left(\frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right) = -\frac{c^2}{r}\sin^2\theta\cos\theta = -\frac{c^2\sin 2\theta\cos\theta}{2r}$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 - \frac{c^2}{r^2}\,\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}$$

$$u = -r\left\{\cos\theta\left\{\left(1 - \frac{c^2(1-2\cos^2\theta)}{r^2} + 1 - \frac{c^2\cos^2\theta}{r^2}\right)\right\}\right.$$

$$= -y\left(1 + \frac{c^2\cos^2\theta}{r^2}\right)$$

$$= -y - \frac{c^2\sin\theta\cos^2\theta}{r}$$

$$\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 - \frac{c^2}{2}\,\underbrace{\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}}_{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$+\frac{c^2\cos 2\theta}{2r^2}$$

$\cancel{\text{[illegible]}}$

$$u = c\frac{xy^2}{r^5} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{r^5} - \frac{5xy^3}{r^7}$$

$$v = c\frac{y^3}{r^5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{5xy^2}{r^7} - \frac{10xy^2}{r^7} + \frac{35x^3y^2}{r^9} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

$$w = c\frac{\cancel{xy}^2}{r^5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7} - \frac{15xy^2}{r^7} + \frac{35xy^4}{r^9} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{5xy^2z}{r^7}$$

$$p = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{5xy^2}{r^7} + \frac{35xy^2z^2}{r^9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{r^5} - \frac{15xy^2}{r^7}\right) \qquad \frac{2x}{r^5} \quad -45 \quad + \frac{35xy^2}{r^7}$$

$$\frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{5xy^3}{r^7} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{5y^4}{r^7}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{5y^3}{r^7} + \frac{35x^2y^3}{r^9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7} - \frac{20y^3}{r^7} + \frac{35y^5}{r^9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{5y^3}{r^7} \qquad + \frac{3\cancel{z}^2y^3}{r^9}$$

$$\frac{6y}{r^5} \quad - \quad 45 \quad + \frac{35y^3}{r^7} \qquad \frac{2}{3}\left(\frac{3y}{r^5} + \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7}\right)$$

$$\frac{6y}{r^5} - 10\frac{y^3}{r^7}$$

$$\sqrt{u^2+w^2} = \frac{\omega y^2}{r^5} \qquad V = \frac{y^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta \qquad \int \sin\theta\, d\theta \cos^2\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} = \psi$$

$$v = \frac{y^3}{r^5}$$

[illegible] exposer

[illegible] considérons

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] d'aujourd'hui [illegible]

[illegible]

[illegible] tracer, construire une notion

[illegible] établir, démontrer, prouver

[illegible] signaler, noter, remarquer

cas auquel nous avons affaire

une aire

$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial \zeta}{\partial y} =$

$\boxed{\psi \text{ na osi}}$

$x\sqrt{1-x^2}$
$= x\sqrt{(1+x)(1-x)}$

$x=0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1

$\psi = 0$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$

1761
2041
0.9720
0.9860
0.968 : 4 =
0.242

1.732 : 4 $= \frac{\sqrt{3}}{4}$
0.433

$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16-9}{16}} = \frac{3\sqrt{7}}{16}$
42255
4771
89965
− 2041
6955
0.496

0

0.968.4
3.872

0.866.2
1.732

42250
4771
94545
0.882

$\frac{\sqrt{7}}{4}$ / $\frac{1}{3}$

76.5°

60°

41.5°

1.334
− 0.242
1.092

10472
0433
0.614

0.724
0496
0.228

128
64
0

1.57
1.1 7
0.78
0.39

48 | 48 | 38 | 23

0.65^2
0.8129
0.6258 − 1
0.422
0.578
7619
88095
0.7602

0.8129
8809
6938
10.0680
4947

$x\sqrt{1-x^2} = 0.4941$
0.864
0.374

$x = 0.65$

97·12 :2= 48·56
14·09

104·04 52·02
26·57

110·55 55·28
36·87

116·57 58·29

135 67·5
63·43
4·07

$\frac{17}{16}$

$\frac{5}{4}$

$\frac{25}{16}$ =

2

5

6021
4771
1250

30103
− 4771
− 1761

1139
− 6021
5118

23045
20412
02633
9·3899
9·75335
9·1646

0969
9·6506
9·7475
9·3807

1938
9·7782
9·4994
9·4714
1250

3010
9·8495
9·3733
9·5238

6990
9·9515
8·2426
8·8930
6096
9·5026

5118
9·9202
9·0932
9·5242
1761

6021
9·7667

3010
9·6817

$\frac{4}{3}$
9·5964

1

1/2
30 103
9·2016

2/3
9·3481

$$\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$g(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-1}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}} + f(\alpha) - f(\beta)\right] = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

$$= r\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \overbrace{J \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})}^{b}$$

α

9 : 16 = 5

6·39
1·60

$\sqrt{43}$

272 . 3/4
276
0·69 49
1·18 34
1·52 32
1·86 30
2·14 26
2·38

15 . 3/4
45
1·12 38
1·5 33
1·83 30
2·13

1·6 . 3/4
1·2

122 . 3/2
0·61
1·83
1·24 . .
142 . 3/2
0·71
2·13
159 . 3/4
477
238

144 . 3/2
72
216

$\alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

$v = f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta)$

$f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = - g'(\alpha)$

$\sqrt{\alpha^2-1} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} = - g'(\alpha) = \cancel{\frac{2\alpha^2-1}{\sqrt{\alpha^2-1}} = 2\sqrt{\alpha^2-1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}}$

$\int d\alpha \sqrt{\alpha^2-1} = \alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \int \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} d\alpha \qquad g(\alpha) = -\alpha\sqrt{\alpha^2-1}$

$\psi = \cancel{\alpha\beta\left(\sqrt{\beta^2-1} \pm \sqrt{\alpha^2-1}\right)} = \alpha\sqrt{\beta^2-1} + \beta\sqrt{\alpha^2-1} - \alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \beta\sqrt{\beta^2-1}$

$= -(\alpha-\beta)\left[\sqrt{\alpha^2-1} - \sqrt{\beta^2-1}\right] = \cancel{r\cos\theta \cdot \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

$= - r\sin\theta \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$= - y\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$v = \alpha\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] + \beta\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$

$= (\alpha-\beta)\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$

$= -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad r\sin\theta\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} - \right)$

$u = \frac{1}{2}\left\{f(\beta) - f(\alpha) + \cancel{f(\alpha) - f(\beta)} + \beta f'(\alpha) - \alpha f'(\beta)\right\}$

$- f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$

$+ f(\beta) + \beta f'(\beta)$

$= \frac{1}{2}\left\{ 2\left[f(\beta) - f(\alpha)\right] + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]\right\}$

$= -\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$$(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2} = \delta\,\frac{-y^2x}{r^4}$$

$$\frac{y\,\alpha}{\delta}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

224

$\lim_{\infty} \psi = -y^2$

$x=0$: $\psi = -y\sqrt{r_1 r_2} =$

$\psi_0 = -y\sqrt{(y^2+1)}$

	ψ_∞	ψ_0
$y=1$	-1	-2
$y=2$	-4	-10
$=3$	-9	-30

$y=\frac{1}{2}$ $\psi_\infty = \frac{1}{4} = 0.25$ $\psi_0 = \cancel{\frac{5}{8} = 0.62}\ 0.558$

$y = 1$ 1 $\sqrt{2}$

2

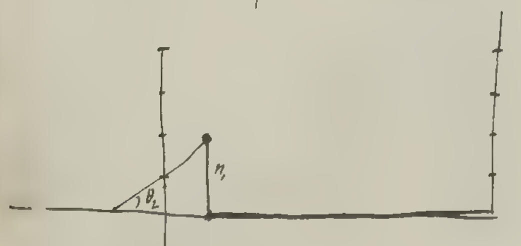
1.42

$y = \frac{3}{2} = 1.5$ $\frac{9}{4} = 2.25$

$y = 2$ 4 4.48

$y = \frac{3}{4}$ $\psi_\infty = \frac{9}{16} = 0.56$ $\psi_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{25}{16}} =$

$6.6 \parallel \frac{15}{16}6 = 0.94$



$y = 1.7$

$\psi = y^{3/2}\sqrt{y^2+4}\ \sin\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\left(\sin\frac{\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_2}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\frac{1-\cos\theta_2}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos\theta_2}{2}}$

2.9

1.16

1.08

0.43

$y = 1.2$

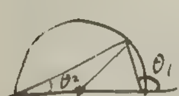
$\sqrt{2.44} = 1.56$

1.87

$\sqrt{2.69} = 1.64$

2.13

1.4.14
56
2.96.14
1184
4.14



$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_2$

$\frac{\theta_1}{2} = \frac{\pi}{4} + \theta_2$

$y = 0.71$	$\psi_\infty =$	
	$\frac{1}{2}$	0.45
1	1	0.78
1.22	$\frac{3}{2}$	1.03
1.42	2	1.25
1.58	2.5	1.44
1.73	3	
1.87	3.5	1.75
2	4	1.88
	4.5	2

$\psi = -y\sqrt{r_1 r_2}\ \sin\left(\theta_2+\frac{\pi}{4}\right) = -y\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\theta^{3/2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = 30°$ $\frac{1\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} = 1.732 : 4 = 0.433$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.7586
9.8793
9.9479
1505
9.7363

0.545

33° 0.5

$\psi = 0.65$

$\sqrt{2.21}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{1.105}$

$= \sqrt{2}\cdot 1.05$

1.26

1.79

1.65

$\sqrt{3.25}$

3.56

1.80.15

1.89.16

3.0

$c = r \sin^2\theta$

$y^2 = \dots$

$\left(\frac{c}{y}\right)^4 + \frac{2c^2 x}{y^2}$

1761 3979
3522 7958
1174 2653

6990.
13980
4660

2.92

20° 9.53405
9.13967
8.77472
1.2253
0.4084
0.8168

0.56

$x = \frac{y^2}{c^2}\left(1 - \frac{c^4}{y^4}\right)$

c = 0.63		
1	1.31	1
2	1.84	1.59
3		2.08
4		2.52

6020 7993
2007
9542
3181
2007
4014

$\psi = 2\sqrt{r^3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = r\sin\theta\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{r^3}} = \frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{c}$ $\qquad r = \left(\frac{c}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{2/3}$

30° 9.69897
9.41300
9.11197

$\frac{2}{3}$ (+0.888
0.296
+0.592
~~0.418~~

r = 3.94
2.346
6.2

40° 9.80867
9.53405
9.3421
6579
13158 :3 = 4386

c = 1

275
165
4.4

60° 9.69897
9.93753
9.6365
0.3635
0.727
0.242
r = 1.747
1.0478

c = 1 2.80

9.84949
0.15051
30102
0.1003
r = 1.26
756
2.02

110° 9.91336
9.7299
88635
11365
2273
0791
r = 1.20

120° 9.93753
9.93753
87506
0.12494
0.24988
0.08329
r = 1.211
727
1.94

150° 9.69897
9.98494
9.6839
0.3161
0.6322
0.2107
r = 1.63
98
2.61

160° 9.99335
9.53405
9.5274
0.4726
0.9452
0.3151
r = 2.07
124
3.41

170° 9.23967
9.99834
9.2380
0.7620
2540
0.508
r = 3.22
193
5.15

$\frac{0}{0}$

30°	60°	90°	120°	150°	180°
0·259	0·5	0·707	0·866	0·966	1·0
0·0863	0·167	0·236	0·289	0·322	0·333
0·966	0·866	0·707	0·5	0·259	0·
1·052	1·033	0·943	0·789	0·581	0·333
0220	·0141	9745	8971	7642	5229
8·8260	9·3979	9·6990	8750	9699	
8·8480	9·4120	9·6735	9·7721	9·7341	9·5229

$= \frac{3}{2} \log r$

$\frac{2}{3}$(1·1520	0·5880	0·3265	0·2279	0·2659	0·4776
2·304	1176	0·653	0·4558	0·5318	0·9552
0·7660	0·3920	0·2177	0·1519	0·1773	0·3184
1·75 7·68	74 3·21	495 2·19	43 1·85	1·95	2·70
r = 5·83	2·47	1·65	1·43	1·50	208
210	240	270	300	330	260
105	120	135	150	175	

φ	
1	2x
2	1
3	1·31
4	1·59
5	1·84
6	2·08

75 ~~0·966~~	866	707	0·500	259
322	289	236	167	086.3
− 259	− 500	707	866	966
0·063	− 211	− 471	− 699	− 880
0·7993−2	0·3243−1	6730	8445	9445
9·9699	9·8750	6990	9·3979	8·8260
8·7692	9·1993	9·3720	9·2424	8·7705
1·2308	0·8007	0·6280	0·7576	1·2295
2·4616	1·6014	1·2560	1·5152	2·4590
0·8205	0·5338	0·4187	0·5051	0·8197
6·62	3·42	2·62	3·20	6·60
4·13	2·15	1·65	2·02	8·50

$\tan\frac{\theta}{2} = -3$

71·5°

108·5°

$\boxed{\theta = 217°}$

378
378
4·16

230
115
65
·95728
0·906
0·702
−0·422
~~0·325~~
0·6385 −1
9·9146
9·5531
0·4469
0·8938
0·2979

$m = \sqrt{1-x^2}$

91456
822
0·178

2504
6252

0·724
8597
9146
9·7743
0·2257
0·4514
0

−0·120
0·0792 −1
9·9146
9·9938
1·0062
2·0124
0·6708
~~10·1~~ 2

469 . 63.47
141
6·1
282
141
2·96

315°
157·5
22·5

9·58284
9·1657
0·383
0·1277
−0·924
~~1·0541~~
9·1657
~~0·0219~~
~~9·9656~~
~~9·9872~~
0·796
9009
1657
9·0666
0·9334 . 2
1·8668
0·62227

9·96562

9·1876
0·8124 . 2
1·6248
0·5416
~~1·48~~

1950
97·5°
82·5°

99627
99254

0·9914
0·33047
−0·13053
~~0·4610~~ 0·19994
~~9·9925~~ ~~9·9925~~
~~10·85325~~ ~~10·9924~~

9·9925
7010
9·2935
0·9065 . 2
1·4130
0·4710

4·19 . 6
2514
125
2·639

4·2 .
126
5·46

2·96
89
3·85

6·3.3
1·89

$x = 1$

y		θ	θ_2		θ_1	$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta$	← log sin	$2\log \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$
$y = \frac{1}{4}$	$= 0.25$, 0.125	$14.04°$	$7.12°$	48.66	$90°$	$34.52°$	9.75335	9.8749
						25.45	9.6332	9.8966_5
$\frac{1}{2}$		$26.57°$	$14.04°$	52.02		18.41	9.4994	9.9148
$\frac{3}{4}$	$.75$, $.375$	$36.87°$	$20.55°$ ~~20.55~~	55.25				9.9298
1		$45°$	$26.57°$	58.29		13.29	9.3733	
2		$63.43°$	$45°$	67.5		4.07	$+\ 8.2426$ / 6096 / 9.09324	9.9656
$\frac{3}{2}$	$56.32°$		$36.87°$		63.44	$7.12°$		9.9516

9.3849 ~~9.93~~

9.6506

9.7782

9.8495

9.9515

1 9.9202

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 126.87 \\ 63.44° \\ -\ 56.32 \\ \hline 7.12 \end{array}$$

~~9.9516~~

$u = +\ 0.1461$	0.2403	0.2961	0.3341	0.3345	0.3182
$+\ 7497$	8882	8219	8507	8946	9238
$v = -\ 0.5844$	4806	3945	3341	2229	1591
$+\ 0.1653$	0.3076	0.4274	0.5166	0.6717	0.7647
2183	4880	6308	7132	8272	8835
1646	3807	4714	5238	5242	5026
0537	1073	1594	1894	3030	3809
113	128	144	155	201	240

$$\lg(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) = a+ib$$

$$a = \lg\left[r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$b = \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta^2-1} - \beta\sqrt{\alpha^2-1} + \lg(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) - \lg(\beta+\sqrt{\beta^2-1})\right]$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left\{\sqrt{\beta^2-1} - \sqrt{\alpha^2-1} - \alpha\beta\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right\}$$

$$u = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)$$

$$\cancel{\sqrt{\alpha^2-1}}\quad \frac{1-\alpha^2-\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}} =$$

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \cancel{\ldots}$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\cancel{2\sqrt{\beta^2-1} - 2\sqrt{\alpha^2-1} + (\alpha-\beta)\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\right)} =$$

$$\cancel{\int\sqrt{\alpha^2-1}\,d\alpha}\quad \cancel{\frac{\alpha^2-2\alpha^2+2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$$

$$\alpha+\sqrt{\alpha^2-1} = = \cancel{e^{x+iy}}\, e^{a+ib}$$

$$x+iy+\sqrt{x^2-y^2-1+2ixy} = e^a\cos b + i\, e^a \sin b$$

$$\cancel{\sqrt{\alpha^2-1} = X+iY}$$

$$\cancel{\alpha^2-1 = X^2-Y^2+2iXY = x^2-y^2-1+2ixy}$$

$$\cancel{X^2-Y^2 = x^2-y^2-1 = X^2-\left(\frac{xy}{X}\right)^2}$$

$$\cancel{XY = xy}$$

$$\cancel{X^2+Y^2 = \sqrt{x^2+2xy-y^2-1}} \qquad \cancel{X^4 - X^2(x^2-y^2-1)} = x^2y^2$$

$$r\cos\theta+\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = e^a\cos b$$

$$r\sin\theta+\sqrt{r_1r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = e^a\sin b$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{r\sin\theta+\sqrt{r_1r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta+\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} = r\cos\theta+\sqrt{\frac{r_1r_2}{2}\left(1-\cos(\theta_1+\theta_2)\right)}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{y+\sqrt{\frac{r_1r_2-x_1x_2+y^2}{2}}}{x+\sqrt{\frac{r_1r_2+x_1x_2-y^2}{2}}}$$

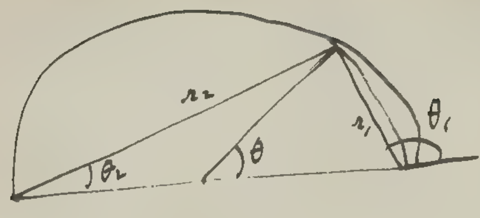
$> \cdots <$ $\quad \theta_2=\theta=0 \quad \theta_1=\pi$

$\vdash_x$ $\quad \psi = x\sqrt{1-x^2}$ $+$

dla krzywej $y=0$

$$\cancel{\operatorname{tg} b = \frac{0+\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{(1-x^2)}}} = 0 \qquad b=0$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\cancel{x}+\sqrt{r_1r_2}}{x\cancel{+}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$



$\theta_2 = \frac{\theta}{2}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_2$

$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$

$\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$

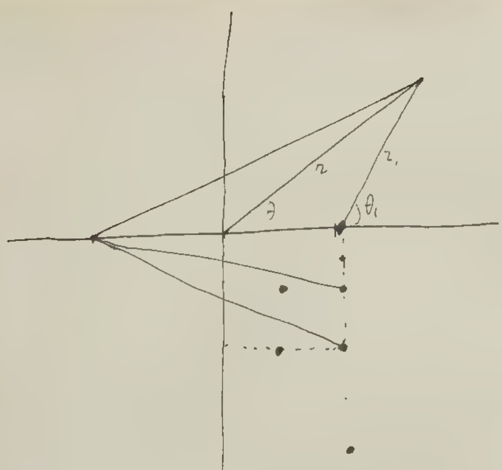
$r_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2}$

$r_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ $\qquad r = 1$

$r\sqrt{r_1 r_2}\, \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = \cancel{2\sqrt{\sin}}\ \sqrt{2 \sin \theta} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta + \sqrt{2\sin\theta} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta + \sqrt{2\sin\theta}\ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

~~θ = 45°:~~ 75	~~30°~~	~~60°~~	~~15°~~	~~75°~~
15°	30°	45	60	75
52.5	60°	67.5	75°	82.5°
9.89927 9.70650 15051	9.93753 9.84948 15051	~~10.03...~~ 9.96562 9.92475 15051	9.98494 9.96876 15051	9.99627 9.99247 15051
9.75648	9.93752	10.04088 372 340	0.10421	0.13925 67 25
0.5709 2588 0.8297	0.866 500 1.366	1.099 707 1.806	1.271 0.866 2.137	1.378 0.966 2.344
~~9.11570~~ 9.7845 9.8570	~~9.4130~~ 9.6990 0000	9.5828 0753	9.4130 1193	9.1157 1430
9.6415	9.6990	9.6581	9.5323	9.2587



$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$

$y = \frac{1}{2}$

$\sqrt{4+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

6152
3010
3142

0·125

$\frac{1}{4}$
6990
3495

$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta$

	r_1	r	r_2	θ	θ_1	θ_2				
$x=1$, $y=1$	1	$\sqrt{2}$ 1·42	$\sqrt{5}$ 2·24	45°	90°	26·6°	13·3°		1·62	116·6 / 58·3 / 45 / 13·3
$y=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$ = 1·12	2·06	26·6°	90°	14°	25·4°	52°	1·28	52 / 26·6 / 25·4
$y=2$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	63·4°	90°	45°	4·1°		11·3	
$y=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1·03	2·01	14°	90°	7·1°	34·5°		1·16 ?	135 : 2 = 67·5 / 63·4 / 4·1

~~52~~ 97·1
48·55
14
34·5

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{r^2}\,\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\theta\,\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

$\frac{5}{2}$ - ·25

9·89653
9·38034
0·5101 9

9·05104
9·63239
0·09691
9·38034

9·96562
8·8919
1·0737

11·85
- 0·5
11·3

98·24151
9·95141
6990
8·8919

9·87479
9·1624
0·7124

9·75313
9·78368
1·0256
9·1624

5284
- 2
1·28

9·92983
9·51234
0·4175

9·84949
9·36182
0·30103
9·51234

2615
- 1
1·615

$\left(\frac{1}{2}\right)$

5·16
- 4
1·16

45

0·438	0·500	0·4551	0·3206	0·1814
966	866	707	5	2588
1·404	1·366	1·162	0·841	0·440
-9·91	~~1354~~	0653		
9·91	~~1584~~	2567	3298	3699
1473		0653	9248	6435
9·7718	10·0	10·1914	4050	7264
30·60	45··	57·24	68·52	79·37
18.6 / 11 / 0·523 / 11	0·785	$0·995_4$	1·187 / 9	$1·379_6$
b = 0·534 / 438	0·785 / 500 / 0·78	0·999 / 455	1·196 / 941 / (1·17)	1·385 / 181

10°

50° 9·8842 / 9·6198 / 1505 / 9·6545 — 9·8081 / 9·6198 / 1505 / 9·5784

7958 / −1348 / 9·6610

$24·60° = 0·419 + 10 = 0·429$

0·4513 / 1736 / 0·6249 — 0·3788 / 9848 / 1·3636

37·5°	30°	22·5°	15°	7·5°
9·78445	9·69897	9·58284	9·41300	9·11570
9·8570	0	0753	1193	1430
9·6415	9·69897	9·6581	9·5323	9·2587
0·438	0·500	0·455	0·341	0·181

1·57 1·18 0·78₅ 0·39₂

1·57

x = 0 $\frac{48}{8}$ 1·09 $\frac{17}{48}$·25 17 0·61₄ 0·37₄

0·21 x = 0·25 9 0·41 x = 0·5 x = 0·65

157 1·204 0·855 0·544 0·285 0·096

0·366 ~~1·375~~ 0·35 ~~1·196~~ 0·31 ~~1·0~~ 0·26 ~~0·78~~5 0·17 ~~0·534~~ 0·096 ~~0·429~~

$\vartheta = 75°$ $\vartheta = 60°$ $\vartheta = 45°$ $\vartheta = 30°$ $\vartheta = 15°$ $\vartheta = 10°$

$\frac{7}{33}\cdot 11$ ~~85~~

3·3

$\frac{24}{35}\cdot 15$ $\frac{11}{23}$ 15

$x = \infty$ 90° $\vartheta = 78·5°$ 66° 50·5°

17·5 12·5 1.

tg 11·5 = 0·203 tg 24° = 0·445 tg 39·5° = 0·824

16° 17° 20° 37°

$\vartheta = 74°$ 56·7° 37°

$t_g =$ ~~3·49~~ 1·52 0·754

14 ~~0·68~~ 30

16° 33·3°

0·287 0·654

11·5 26·7

$x = 1$

$x_1 = 0$ 0·25

$x_2 = 2$ ‖ $r_1 = y =$ $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3

$r_2 =$	2·01	2·06	2·13	2·24	2·5	2·84	3·20₅
							16·025
	0·5025	1·03	1·56	2·24	3·75	5·68	8·01
	−0·0625	0·25	0·56	1	2·25	1	6·25
	0·44	0·78	1·04	1·24	1·5	1·68	1·76
$\sqrt{r_1 r_2 - y^2} =$	$\sqrt{0·22}$	0·39	0·52	0·62	0·75	0·84	0·88
	= 0·47	0·62₅	0·72	0·79	0·87	0·92	0·94
	0·565	1·28	2·16	3·24	6·0	9·68	14·26
	$\sqrt{0·28}$	0·64	1·08	1·62	3·0	4·84	7·13
	= $\frac{0·53}{0·47}$	$\frac{0·8}{0·625}$	$\frac{1·04}{0·72}$	$\frac{1·27}{0·79}$	$\frac{1·73}{0·87}$	$\frac{2·20}{0·92}$	$\frac{2·67}{0·94}$
tg =	724	903	017	104	238	342	427
	672	796	857	898	940	964	973
	10·052	10·107	160	206	298	378	454
	48·5	52°	55·3	58·1	63·3	67·3	70·1
θ =	0·846(−1)	0·908	0·965	1·01	1·106	1·176	1·224
	0·7013(−1)	9·0128	9931	3502	5740	7543	9036

+1 = +x

0·8506(−1)	0·0064	0·0965	0·1751	0·2870	0·3771	0·4518
9·7533	6332	4994	9·7733	0932	8·8527	
0·0128	0492		1505		3495	
9·6167	9·6888		9·6989		9·5787	
0·846	908		1·01		1·1767	
−0·414	0·488		0·500		0·379	
0·432	0·420		0·51		0·797	

$$\lim_{\infty} \varphi = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$$

150

$\theta = 45°$

$$\begin{array}{r} 0.7854 \\ -\ 5 \\ \hline 0.2854 \end{array}$$

$\theta = 60°$

$$\begin{array}{r} 1.0472 \\ -\ 433 \\ \hline 0.614 \end{array}$$

$\theta = 75°$

$$\begin{array}{r} 1.309 \\ -\ 25 \\ \hline 1.059 \end{array}$$

50°

$$\begin{array}{r} 0.8727 \\ -\ \cancel{383} \\ \hline \cancel{0.490} \\ 4924 \\ \hline 0.380 \end{array}$$

51° : 0.890

102

78

$$\begin{array}{r} -\ \cancel{399} \\ \cancel{0.567} \\ 489 \\ \hline 0.401 \end{array}$$

$\theta = 65° =$

$$\begin{array}{r} 1.134 \\ -\ 383 \\ \hline 0.751 \end{array}$$

9.6716

66° =

$$\begin{array}{r} 1.152 \\ -\ 372 \\ \hline 0.780 \end{array}$$

132

48

$\theta = 76°$

$$\begin{array}{r} 1.326 \\ -\ 235 \\ \hline 1.091 \end{array}$$

152

28

4695

$\theta = 78°$:

$$\begin{array}{r} 1.361 \\ 203 \\ \hline 1.158 \end{array}$$

20 7

1   2

$\frac{2}{7} \cdot 2$

150

24

0093

4067

$$\iint \Big\{ \cancel{u\left(p + \tfrac{2}{3}\mu\, \mathrm{div}\right.} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\Big) \cos nx + u\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos ny + u\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos nz$$

$$+ \ldots$$

$$+ \ldots \Big\} dS$$

$$\iint (p_{xx}\cos nx + p_{xy}\cos ny + p_{xz}\cos nz)\, u + \ldots \qquad =$$

$$\iiint \left[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} u + p_{xy} v + p_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{xy} u + p_{yy} v + p_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z}(\qquad)\right] d\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} u) = p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}$$

$p_{xx}\, u\, dz\, dy$

$$p_{xx} u\, dy\, dz \Big|_{S_1}^{S_2} = \int \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} u)\, dx\, dy\, dz$$

Voraussetzung: $(p_{xx} u)$ stetig überall innerhalb

(~~nicht nötig an Oberfläche~~)

$u\, v\, w$ ebenfalls stetig

$\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. im Innern

$$= \iiint u\overbrace{\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right)}^{\frac{Du}{Dt}} + v(\quad) + w(\quad)$$

$$\underbrace{+\, p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots}_{\Phi}$$

$$= \rho u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \ldots \qquad + \Phi$$

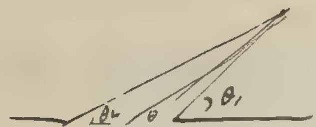
Voraussetzung V^2 überall stetig

$$= \frac{\rho}{2}\left(u\frac{\partial u^2}{\partial x} + v\frac{\partial u^2}{\partial y} + w\frac{\partial u^2}{\partial z}\right) \ldots \qquad + \Phi$$

$$= \frac{\rho}{2}\, u\frac{\partial V^2}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\ldots + \ldots \quad + \Phi = u V^2\, dy\, dz - \cancel{\int V^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}$$

$$+ v V^2\, dx\, dz$$

$$+ w V^2\, dx\, dy$$



dla dużych r: $\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 + \frac{\cos 2\theta}{2r^2}$

$$\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$u_\infty = -4\kappa\left(1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right)\sin\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^4}\right) - \frac{4\kappa}{1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}}\sin\left\{\theta+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right\}$$

$$= \sin\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^2}\right) + \cancel{\ }\ \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r^2}$$

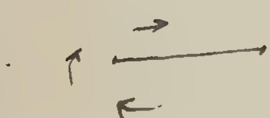
$$= -4\kappa\left\{\sin\theta\left\{\left[1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right] + \frac{1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}}{1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}}\right\}\right.$$

$$\cos^2-\sin^2 = \cos 2\theta$$

$$= 1+\frac{\cos^2\theta}{2r^2}(2-\sin^2\theta)$$

-4κ

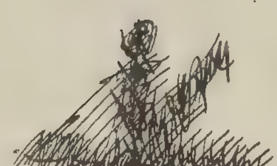
$$\frac{\left(1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right)^2 + \left(\cancel{1}+\frac{\cos^2\theta\cos 2\theta}{2r^2}\right)}{1+\dots}$$



$$\iiint(F\nabla^2 G - G\nabla^2 F)\,dv = \iint\left(F\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial F}{\partial n}\right)dS$$

$$\underbrace{(\nabla^2\psi)^2}_{\Phi} = \cancel{\nabla^2\nabla^2}$$

$$= \iint\left(\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right)dS$$



$$\iiint\psi\,\nabla^2\psi\,dv = \iint\psi\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial n}}_{=-\frac{\partial\zeta}{\partial n}}dS - \iiint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

$$\cancel{\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}}$$

$$\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

$$v = f(\beta) + f(\alpha) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta)$$

$$f(\beta) + f(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta) = -\left[\beta f'(\beta) + \alpha f'(\alpha)\right]$$

$$g'(\alpha) = -\left[f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)\right]$$

$$g(\alpha) = -\alpha f(\alpha)$$

$=$

$$\psi = \sqrt{r}\left[\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= -\sqrt{r}\;2\sin 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sqrt{r}\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\psi_0 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right] = 2\sqrt{r}\cos 2\theta\cos\theta$$

$$\psi = 2\sqrt{r}\cos\theta\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]$$

$$\psi = x\,\mathcal{R} f(z) + \mathcal{R}\varphi(z)$$

$$\psi = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = f(\alpha) + f(\beta) + (\alpha+\beta) f'(\alpha) + g'(\alpha)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = f'(\beta) + f'(\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}^3} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)$$

~~$u = 2\left[f(\alpha) - f(\beta)\right]$~~

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + 2(\alpha+\beta)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right] + g'(\alpha) + g'(\beta) = 2\mathcal{R}f + 4x\,\mathcal{R}f' + \mathcal{R}g'$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2(\alpha+\beta)\left[\frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i}\right] + \frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} = 4x\,\mathcal{I}f' + \mathcal{I}g'$$

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 + \left(i\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\right)^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0$$

wymaga albo $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0$

albo $\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0$

$$V^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$

$$f(\alpha) + f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) = 0$$

$$\equiv f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + g'(\beta) = 0$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{a^2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\alpha^2+\beta^2 \cancel{+} c\alpha\beta = d$$

$$\alpha^4-1 = (\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha+i)(\alpha-i)$$

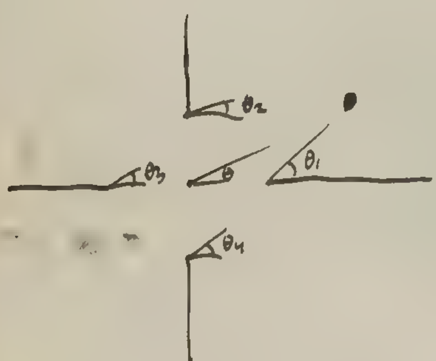
$$\cancel{(\alpha^2-1)(\alpha^2+1)}$$

$$f=\sqrt[4]{\alpha^4-1} \qquad f' = \cancel{\frac{\alpha^3}{\sqrt[4]{\alpha^4}}} = \frac{\alpha^3}{(\alpha^4-1)^{3/4}} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt[4]{\alpha^4-1}}\right)^3$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha^4-1)^{3/4}}$$

$$u = -2y\,\frac{r^3}{(r_1r_2r_3r_4)^{3/4}}\,\sin\left[3\theta - \frac{3(\theta_1+\theta_2\cdots)}{4}\right]$$

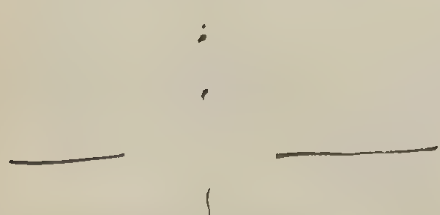
$$v = (r_1r_2r_3r_4)^{1/4}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_4}{4}\right) + y\,\frac{r^3}{(r_1\cdots r_4)^{3/4}}\cos\left[3\theta - \frac{3(\theta_1+\theta_2\cdots)}{4}\right]$$



$$\frac{(r_1r_2r_3r_4) - r^4}{\cdots}$$

$$f(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-1}$$

$$g' = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$



$$v = \frac{1}{\sqrt{r_1r_2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \quad \Bigg\| \quad \frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right] \qquad \Big\| \qquad \psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$f(\alpha) = a$$

$$\psi = ay + \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i} \qquad\qquad \psi = ax + \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{\cancel{2}}$$

$$u = -a + g'(\alpha) + g'(\beta) \qquad\qquad u = i\left[g'(\alpha) - g'(\beta)\right]$$

$$v = \frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} \qquad\qquad v = a + g'(\alpha) + g'(\beta)$$

$$\left[-a + g'(\alpha) + g'(\beta) + \frac{h'(\beta) - h'(\alpha)}{i} C\right]^2 + \left[\frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} + Ca + \left[h'(\alpha) + h'(\beta)\right]C\right]^2 = 0$$

$$g'(\alpha) = \alpha^n$$

$$h'(\alpha) = \alpha^m$$

$$\left[-a + r^n \cos n\theta - C r^m \sin m\theta\right]^2 + \left[Ca + r^n \sin n\theta + C r^m \cos m\theta\right]^2 =$$

$$\cancel{a^2(C^2+1) + r^{2n} + C^2 r^{2m} +} \quad \text{kiedy } n = m$$

$$\left[-a + r^n(\cos n\theta - C\sin n\theta)\right]^2 + \left[Ca + r^n(\sin n\theta + C\cos n\theta)\right]^2 =$$

$$a^2(C^2+1) + 2r^n a(C\sin n\theta - \cos n\theta + C\sin n\theta + C^2\cos n\theta)$$
$$+ r^{2n}(1 + C^2)$$

$$1 + \frac{2r^n}{a} \frac{C^2\cos n\theta + 2C\sin n\theta - \cos n\theta}{1 + C^2} + \frac{r^{2n}}{a^2} = 0$$

dla $C = 1$:

$$1 + \frac{2r^n}{a}\sin n\theta + \frac{r^{2n}}{a^2} = 0$$

$$\frac{r^n}{a} = R \qquad\qquad 1 + 2R\sin n\theta + R^2 = 0$$

$$R = \sin n\theta \pm \sqrt{\sin^2 n\theta - 1} \qquad \text{Compl.}$$

Ogólnie $1 + 2R\,\dfrac{(C^2-1)\cos n\theta + 2C\sin n\theta}{1+C^2} + R^2 = 0$

$$(1+R)^2 + 2R\,\frac{(C^2-1)\cos n\theta + 2C\sin n\theta - 1 - C^2}{1+C^2}$$

Przyjmując: $\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right]$

$f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$

$g'(\alpha) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$

$g(\alpha) = -\frac{\sqrt{\alpha}^3}{3}$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha} + \frac{\beta\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt{\alpha}}{3}\right] = \cancel{\quad}$$

$$= \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^3}{3i} = \sqrt{r}^3 \sin^3\frac{\theta}{2}$$

$\cancel{\sqrt{u^2+v^2}} = r_1 \sin^4\frac{\theta_1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} &= -\frac{1}{i}\,\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\beta} &= \frac{1}{i}\,\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\beta}} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^4}{4\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}{r} = r\sin^4\frac{\theta}{2}$$

stożek

$\cancel{\Phi_1 = -\frac{1}{i}\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}}}$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = M + iN \\ \Phi_2 &= \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = M - iN \end{aligned}\right\} \quad \Phi_1\Phi_2 = \underbrace{M^2 + N^2 = 0}_{\text{równanie ścian}}$$

Przyjmując: $\psi = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta b$ $\qquad f = b\alpha \qquad g = \alpha^2$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 2(\alpha + \beta b) = 2\left[(1+b)x + (1-b)iy\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 2(\beta + \alpha b) = 2\left[(1+b)x - (1-b)iy\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 4\left[(1+b)^2x^2 + (1-b)^2y^2\right] = 0 \quad = \text{równanie punktu } O$$

Więc zawsze istnieją ściany, choć może degenerować w punkt

Równanie ściany pod przyjęciem $\varphi = (\alpha \cancel{f(\beta)}$ ~~[f(\alpha) + f(\beta)~~

$$= \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) \ldots$$

$$[f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha)][f(\alpha) + \alpha f'(\beta) + g'(\beta)] = 0$$

$$f(\alpha) f(\beta) + \alpha\beta f'(\alpha) f'(\beta) + g'(\alpha) g'(\beta) + \alpha f(\beta) f'(\beta) + \beta f(\alpha) f'(\alpha)$$
$$+ f(\alpha) g'(\alpha) + f(\beta) g'(\beta)$$
$$+ \alpha f'(\beta) g'(\alpha) + \beta f'(\alpha) g'(\beta)$$

pod przyjęciem $g' = \alpha f'$

$$f(\alpha) f(\beta) + 2\alpha\beta f'(\alpha) f'(\beta) + \alpha f(\beta) f'(\beta) + \beta f(\alpha) f'(\alpha)$$
$$+ \alpha f(\alpha) f'(\alpha) + \beta f(\beta) f'(\beta)$$
$$+ \alpha^2 f'(\alpha) f'(\beta) + \beta^2 \ldots$$

$$= f(\alpha) f(\beta) + (\alpha+\beta)^2 f'(\alpha) f'(\beta) + (\alpha+\beta)[f(\alpha) f'(\alpha) + f(\beta) f'(\beta)]$$

(Spróbować $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$)

vanishing $\underset{\infty}{u\,v\,w}$ $\frac{1}{r}$

$f_1(\alpha) = \log\alpha$

$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\log\beta - \beta\log\alpha + f(\alpha) - f(\beta)\right]$ $\qquad \log\alpha = \log r + i\theta$

$v = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \log\beta - \log\alpha + f'(\alpha) - f'(\beta)\right] = \sin 2\theta \ldots \theta \ldots -$

$u = \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad = \cos 2\theta - \log r + \ldots$

$\frac{1}{\delta_1} : \frac{1}{\delta_2} = V_1 : V_2$

$\zeta = \dfrac{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)_1 - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)_2}{\delta}$

$$\iint\left(\phi\nabla^2\psi - \cancel{\psi\nabla^2\phi}\right)dx\,dy = \int\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \cancel{\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}}\right)ds$$

if ψ everywhere finite, $\lim\phi = 0$: $\iint_0^\infty \phi\,\zeta\,dx\,dy = 0$

$$\iint\phi\nabla^2\psi\,dx\,dy = \int\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \iint\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}\,dx\,dy$$

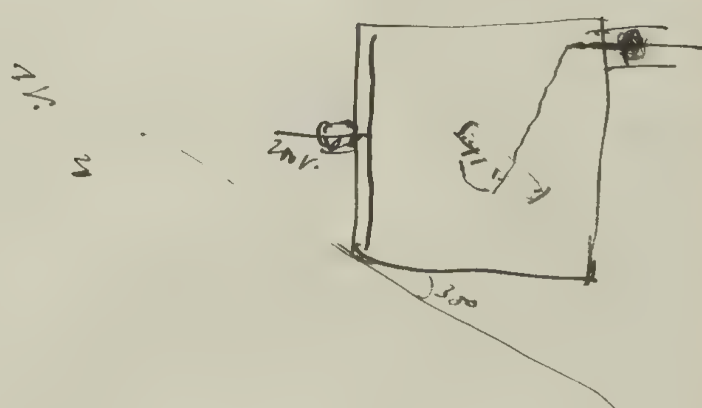
$$= \qquad \iint\left(v\frac{\partial\phi}{\partial x} - u\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Sup. $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

$$\psi = \alpha\beta\left(\frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{1}{1+\beta^2}\right) + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha^2} + \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{2\alpha^2\beta}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha) = \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{\beta(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha}{1-\beta^2} + \frac{2\alpha\beta^2}{(1-\beta^2)^2} + g'(\beta)$$



$n = -1 \qquad R = mk\,r^m$

$$R^2 - 2R\left[-\cos(m+2)\theta - \cos(m-2)\theta\right] = -2 - 2\cos 4\theta$$

$$R^2 + 4R\,\cos m\theta\,\cos 2\theta \qquad = -4\cos^2 2\theta$$

$$R = -2\cos m\theta\cos 2\theta \pm \sqrt{4\cos^2 2\theta\,(\cos^2 m\theta - 1)}$$

Compl.

$n = -2 \qquad R = nk\,r^{m+1}$

$$R^2 + 2R\left[+2\cos(m+3)\theta + \cos(m-3)\theta\right] = -5 - 4\cos 6\theta$$

Czy istnieje ruch nieskończony (t.j. $\lim \psi = \infty$) z warunkiem $\lim u = \lim v = 0$, $\lim p = 0$ $\Big\}\infty$
(ale w skończoności skończony)

$$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta) = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + g(\alpha) - \alpha f(\alpha) + g(\beta) - \beta f(\beta)$$

$$\psi \qquad = 4x\, \mathfrak{R} f(\alpha) + \mathfrak{R}\,\varphi(\alpha)$$

$$\xi = 4\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 4(f'(\alpha) + f'(\beta)) = 8\,\mathfrak{R} f'(\alpha)$$

rząd $f' < 1$

$$p = 8\,\mathfrak{I} f'(\alpha) = 4\,\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{i} = 8\,\mathfrak{I} f'(\alpha) = a + \frac{a_1}{\sqrt{z-\alpha_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{z-\alpha_2}} + \dots \frac{b_1}{(z-\alpha_1)^2} + \dots$$

$$u = i\left[2\left[f(\alpha) - f(\beta)\right] + (\alpha-\beta)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]\right]$$

$$v = (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$$

$v = yp$

Jeśli dla płaszczyzny XY ~~ma~~ istnieje (z przerwą), to ~~[illegible]~~ p punkty osobliwe tylko w skończoności

± 1(?)

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad f(\alpha) = \lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) = a + ib$$

$$u = -4b - \frac{4y}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = -\frac{4y}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

czy może być rząd $f' < -1$; $0 > f > -1$

~~Bspl~~ $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$\psi_1 = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + g(\alpha) - g(\beta)\right] \qquad \psi_2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} + g'(\alpha) + \frac{1}{i}\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} + g'(\alpha)\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta^2} + g'(\beta) + \frac{1}{i}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta^2} + g'(\beta)\right]$$

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] + \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] +$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{\left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] - \left[\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right]\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\right\} = 0$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2\alpha\beta\, g'(\alpha) g'(\beta) + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left[\alpha g'(\alpha) + \beta g'(\beta)\right] +$$

$$- \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \cancel{\alpha\beta\, g'(\alpha) g'(\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left[-\alpha g'(\alpha) + \beta g'(\beta)\right]$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \cancel{\alpha\beta\, g'(\alpha) g'(\beta)} + \underbrace{g'(\alpha)\left(\cancel{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) - g'(\beta)\left(\cancel{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)}_{-2 g'(\alpha)\frac{\alpha^2}{\beta} + 2 g'(\beta)\frac{\beta^2}{\alpha}}\right\}$$

$$\left(-\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) \qquad \left(-\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

$$= 4 + 2\alpha\beta\, g'(\alpha) g'(\beta) + g'(\alpha)\left[2\beta\right] + g'(\beta)\left[2\alpha\right]$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + 2\frac{\beta^2}{\alpha} g'(\beta) - 2\frac{\alpha^2}{\beta} g'(\alpha)\right\}$$

$$-u = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\alpha^2} + \sqrt{1+\beta^2}\right) = \sqrt{r_1 r_2}\,\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = \tfrac{1}{2i}\left(\quad - \quad \right)$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\beta\,\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha\sqrt{1+\beta^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\log\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right) \qquad \beta\,\Big|\,\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\log\ldots$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\beta\frac{\log\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \alpha\frac{\log\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right] \quad \frac{1}{2i}\left[\beta\sqrt{1+\alpha^2}\log\alpha - \alpha\sqrt{1+\beta^2}\log\beta\right]$$

$$-u = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta\alpha\log\alpha}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\right] \quad -u = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2} + \ldots + \frac{\beta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\log\alpha + \ldots\ \sqrt{1+\alpha^2}\log\alpha\ldots\right]$$

$$-u = \sqrt{r_1 r_2}\,\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\log r\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \theta\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$- \sqrt{r_1 r_2}\left[\log r\,\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta\,\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$v =$$

$$= 0$$

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta\sin\left(\quad\right) + \frac{(\theta-\pi)}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$\theta_1 = \pi;\ \theta = \theta_2 = 0$

$\theta_2 = 0;\ \theta = \theta_1 = \pi$

$\sqrt{(\beta+i\alpha)(\beta-i\alpha)}$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta^2+1} - \beta\sqrt{\alpha^2+1} + \text{[illegible]}\right] \mathcal{J}(\alpha\beta\ldots) -$$

$$-u = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sqrt{\beta^2+1}+\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right]$$

$$\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$-2\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\theta$$

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = \frac{1}{2i}\left[\underbrace{\sqrt{\beta^2+1}-\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}}\right]$$

$$-\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\frac{-\alpha^2\ldots}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\underbrace{-\sin\left(2\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}_{-2\cos\theta\,\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\right]$$

$$+r_1 r_2 + 1 = r^2\frac{\sin\left(2\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad ?$$

$$= r^2\left[\sin 2\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \cos 2\theta\right]$$

$$r_1 r_2 - 1 = r^2\frac{\cos\left(2\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$= r^2\left[\cos 2\theta + \sin 2\theta \operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$\cancel{\sin 2\theta\left[\operatorname{tg} - \frac{1}{\operatorname{tg}}\right]} = 2\cos 2\theta$$

$$r_1 r_2 = r^2\cos 2\theta\left[\operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right]$$

$$\frac{\beta^2}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{2} = \frac{\beta^2-1-\beta^2}{2\sqrt{1+\beta^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\frac{r^2}{\frac{1}{2}\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(2\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$-\sin \qquad + \sin \qquad \sin$$

$$-\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} + \sqrt{y^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$-y^2 + y^2 - 1 = -1$$

$(2)-(1) = \qquad v = \mp 2\, \pi^2 \operatorname{arctgh} \frac{2y}{1+y^2} \qquad\qquad -\sqrt{y^2-1} - \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}}$

$(6-5) = \qquad v = \pm y \lg (y^2-1) \qquad -u = -2y\pi$

$(3+4) = \qquad v = 2\sqrt{y^2-1}\, \lg(y+\sqrt{--}) \qquad u = 0$

$(4-3) = \qquad v = \frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}} \lg(y--) + 2y \qquad u = -\pi\, \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}}$

$\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} \lg \dots \quad + \cancel{y} \quad + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{y^2-1}} \lg \text{---} \quad + \cancel{\tfrac{y}{2}} \quad - \frac{y}{2} \lg (y^2-1) \quad - \frac{\pi^2}{2} \operatorname{arctgh} \quad + 3y$

$\frac{4}{2} - \frac{3}{2} \qquad -\frac{3}{2} \qquad \frac{5}{2} - \frac{6}{2} \qquad \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$

$\underbrace{-\frac{\pi}{2} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad -\frac{\pi}{4} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}}} \qquad y\pi \qquad 0$

$-\frac{3\pi}{4} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}} \quad + y\pi$

$$\lg r\,\left(-2\sin\theta + \cancel{2\sin 3\theta - 4\cos\theta\sin 2\theta} + 4\sin\theta\right)$$

$$\underbrace{-2\sin 2\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta\sin\theta}_{-2\sin\theta} + 2\sin\theta$$

$$\lg r\,\left(2\cos\theta + \cancel{2\cos 3\theta + 4\sin\theta\sin 2\theta} - 4\cos\theta\right)$$

$$\downarrow$$

$$2\cos 2\theta\cos\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta - 2\sin\theta$$

$$\theta\left[\cancel{-2\sin\theta - 2\sin 3\theta - 4\sin\theta\cos 2\theta - 4\sin\theta}\right]$$

$$\downarrow$$

$$-2\sin 2\theta\cos\theta \underbrace{- 6\cos 2\theta\sin\theta - 6\sin\theta}$$

$$\downarrow$$

$$-4\sin\theta\cos^2\theta - 12\sin\theta\cos^2\theta = -16\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\theta\left[\cancel{2\sin\theta - 2\sin 3\theta - 4\sin\theta\cos 2\theta - 4\sin\theta}\right]$$

$$\theta\left[\cancel{-2\cos\theta + 2\cos 3\theta + 4\cos\theta\cos 2\theta - 4\cos\theta}\right]$$

$$-6\cos\theta \quad 6\cos 2\theta\cos\theta - 2\sin 2\theta\sin\theta$$

$$-12\cos\theta\sin^2\theta \quad - 16\sin^2\theta\cos\theta$$

$$r = -\frac{3}{4\alpha\beta} + \frac{1}{24}\left(\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\alpha^3}\right) + \frac{1}{4}\left[\lg\alpha - \lg\beta\right]\left[\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right] - \frac{\pi}{4i}\left[\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-3}{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\alpha^3}\right) + \left[\lg\alpha-\lg\beta\right]\left[\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right] + \frac{\pi}{i}\left[\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right]\right]$$

$$\Delta^2 u = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\alpha\beta^2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right) - \left(\frac{\alpha}{\beta^4}+\frac{\beta}{\alpha^4}\right) + \cancel{\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}} -\right.$$

$$\left. -2\left(\frac{\lg\alpha}{\alpha^3}+\frac{\lg\beta}{\beta^3}\right) - \cancel{\left(\frac{1}{\alpha\beta^2}+\frac{1}{\beta\alpha^2}\right)} + 2\left(\frac{\lg\alpha}{\beta^3}+\frac{\lg\beta}{\alpha^3}\right) - \frac{2\pi}{i}\left[\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right]\right]$$

$$u = \frac{1}{16}\left\{-\left(\frac{\lg\alpha}{\beta}+\frac{\lg\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^3}+\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}\right) + \frac{\pi}{i}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}-\frac{\alpha}{\beta^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}\right) + \left(\frac{\beta\lg\alpha}{\alpha^2}+\frac{\alpha\lg\beta}{\beta^2}\right) - \left(\frac{\alpha\lg\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta\lg\beta}{\alpha^2}\right) + \cancel{\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}}\right\}$$

höflichst zu bitten, da er

$$u = \frac{1}{8r}\left[\frac{\cos 3\theta + \cos 5\theta}{6} - 2\cos 3\theta \log r + 2\theta \sin\theta\right]$$

$$v = \frac{1}{8r}\left[\frac{-\sin 3\theta + \sin 5\theta}{6} - 2\sin 3\theta \log r + 2\theta\cos\theta + 3\sin\theta\right]$$

$\theta = 0$ $\quad u = \frac{1}{3} - 2\log r$ $\quad v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = \pi$ $\quad v =$	$\theta = \pi$ $\quad u = -\frac{1}{3} + 2\log r$ $\quad v = -2\pi$

1),

$u = 2\sin\theta \ldots$

$v =$

$\theta = 0$ $\quad u = 1 + 2\log r$ $\quad v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = -\pi + \pi = 0$ $\quad v = -2\log r - 1$	$\theta = \pi$ $\quad u = -2\log r - 1$ $\quad v = 2\pi - 2\pi = 0$

2),

$u = -\frac{2\sin 2\theta \sin\theta}{r} + \frac{2\sin\theta}{r}$

$\theta = 0$ $\quad u = 2$ $\quad v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = 0$ $\quad v = -2$	$\theta = \pi$ $\quad u = -2$ $\quad v = 2$

3),

$u = -\frac{2\cos 2\theta \sin\theta}{r} -$

$\theta = 0$ $\quad u = 0$ $\quad v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = 0$ $\quad v = 0$	$\theta = \pi$ $\quad u = 0$ $\quad v = 0$

!

$u = \frac{\cos\theta}{r} = \frac{x}{r^2}$ $\qquad \theta = 0$ $\quad u = 1$ $\quad v = 0$ $\qquad \theta = \pi$ $\quad u = 1$ $\quad v = 0$

$v = \frac{\sin\theta}{r} = \frac{y}{r^2}$

(5)

$n=2$
$m=-1$ $\quad R = -k\,r^{-4}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos 2\theta - 1\right] = -5 + 4\cos 2\theta$$

$$R = 2\cos 2\theta - 1 \pm \sqrt{\underbrace{4\cos^2 2\theta - \cancel{4\cos 2\theta} + 1 - 5 + \cancel{4\cos 2\theta}}_{\sqrt{4(\cos^2 2\theta - 1)}}}$$

Compl.

$m=-2$ $\quad R = -2k\,r^{-5}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos 3\theta - \cos\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$$

$$R = 2(\cos 3\theta - \cos\theta) + \cos\theta$$

$$= -4\sin 2\theta\sin\theta + \cos\theta \pm \sqrt{}$$

$$= \cancel{2\cos 2\theta}$$

$$R^2 - 2R\left[\nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] = -\nu^2 - 4n\sin^2\nu\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \mp \delta$$

$$\sin(\alpha\theta) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} \mp \alpha\delta\right) = \sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos\alpha\delta \mp \cos\frac{\alpha\pi}{2}\sin\alpha\delta$$

$\alpha = 2p$

$\sin\alpha\theta = \alpha\delta\cdot(-1)^{p}$

$\nu - m = 2(\mu - p)$

$$\cos(\nu-m)\theta = \cos(\nu-m)\frac{\pi}{2}\cos(\nu-m)\delta + \sin(\nu-m)\frac{\pi}{2}\sin(\nu-m)\delta = (-1)^{\mu-q+1}\left(1 - \frac{(\nu-m)^2\delta^2}{2}\right)$$

$$R^2 - 2R\left[(-1)^{\mu-q+1}\nu\left(1 - \frac{(\nu-m)^2\delta^2}{2}\right) + 2\nu\mu\,\delta^2(-1)^{\mu+q}\right] = -\nu^2 - 4n\,\nu^2\delta^2$$

$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

Sup. $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha}$

$\psi = \cancel{(\frac{\alpha}{\beta} + \ldots)}\ (1+\frac{\beta}{\alpha})\, g(\alpha) + (1+\frac{\alpha}{\beta})\, g(\beta) \quad = \quad \times \left[\frac{g(\alpha)}{\alpha} + \frac{g(\beta)}{\beta}\right]$

$\psi = \frac{\alpha}{\beta^2-1} + \frac{\beta}{\alpha^2-1} + \cdots$

$\cancel{u = \frac{r}{r_1 r_2} \cos[\theta - (\theta_1+\theta_2)]}$

$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2-1}$

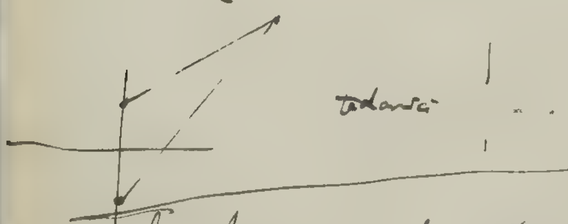
$f'(\alpha) = -\frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)^2}$

$u = f(\beta) + f(\alpha) + \beta f'(\alpha) + \alpha f'(\beta) + g'(\alpha) + g'(\beta)$

$= \frac{1}{\alpha^2-1} + \frac{1}{\beta^2-1} + - \frac{4\alpha\beta}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)} + \cdots$

$= \frac{1}{r_1 r_2}\cos(\theta_1+\theta_2) - \frac{4r^2}{(r_1 r_2)^2}\cos 2(\theta_1+\theta_2)$

∞



$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \quad \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\ldots} = \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = (f(\alpha)-f(\beta))$

$f = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad f' = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}^{\,3}}$

$u = \cancel{\ldots}\, y\, \frac{r}{(r_1 r_2)^3} \sin\left[\theta - \frac{3}{2}(\theta_1+\theta_2)\right]$

$v = +\frac{1}{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - y\, \frac{r}{(r_1 r_2)^3} \cos\left[\theta - \frac{3}{2}(\theta_1+\theta_2)\right]$

$f(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}$ $\qquad \psi = \alpha\beta\left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\beta^2}\right) + g(\alpha) + g(\beta).$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\beta}{1-\beta^2} + \beta\frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha) = \frac{k\alpha}{1-\alpha^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \alpha\frac{(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2} + g'(\beta)$$

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} + \alpha\beta\frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)^2(1-\beta^2)^2} + k^2 \cdot \frac{\cancel{4}\alpha\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$$

$\psi = \frac{1}{2}\Big[$

$$\varphi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) \qquad p = \frac{f'(\alpha) + f'(\beta)}{i}$$

$$u = \frac{1}{i}\left[\boxed{f(\beta) - f(\alpha)} + \beta f'(\alpha) - \alpha f'(\beta)\right] \qquad u = Rf \qquad If$$

$$v = \left[\boxed{f(\beta) + f(\alpha)} + \beta f'(\alpha) + \alpha f'(\beta)\right] \qquad v = -If \qquad Rf$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad u = \frac{-r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad \text{pot. } \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$v = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$u = \frac{-r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right] = -\frac{2r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\theta \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right.$$

$$v = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos \qquad + \cos \qquad\right] = 2\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

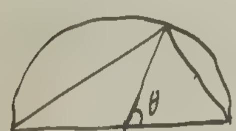
b

a

$$u = \frac{1}{i}\left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}\right] \qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}$$



$$r_1 = 2r \sin\frac{\theta}{2} = 2r \cos\theta_1$$

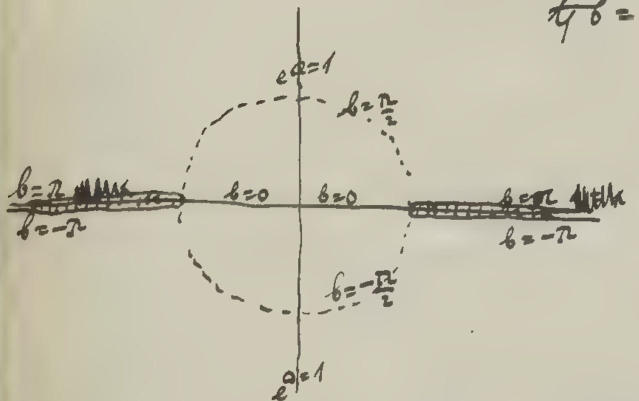
$$\frac{1}{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta \cos\theta_1}}$$

$$\lg \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = a + ib \qquad \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = e^a(\cos b + i \sin b) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \lg \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \lg \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1) + i\,\text{const} \qquad = \frac{1-x^2-y^2+\cancel{} + 2iy}{1-2x+x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} e^a \cos b &= \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \\ e^a \sin b &= \frac{2y}{\cdots\cdots} \end{aligned}\right\} \quad e^a = \frac{\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+4y^2}}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{2y}{1-x^2-y^2} = \frac{2y}{1-r^2}$$



$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} = \frac{r}{\sqrt{r_1}}\left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}^3} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\left(\cos\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{r}{2\sqrt{r_1}^3}\left[\cos\left(\theta - \frac{3\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{3\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{r}{r_1}}\left[\cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{\alpha(1-\alpha)} = \sqrt{r r_1}\left[\cos\frac{\theta+\theta_1}{2} + i \sin\frac{\theta+\theta_1}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{r_1}{r}}\left[\cos\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\right] - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\left[\cos\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\alpha\sqrt{1-\alpha} = r\sqrt{r_1}\left[\cos\left(\theta + \frac{\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{1-\alpha} - \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} = \sqrt{r_1}\left[\cos\frac{\theta_1}{2} + i \sin\frac{\theta_1}{2}\right] - \frac{r}{2\sqrt{r_1}}\left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^3$ $\qquad (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\alpha-\beta)$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$ $\qquad \cancel{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\,(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$

$-2\sin^3\frac{\theta}{2}$ $\qquad -\sin\theta\,\sin\frac{\theta}{2}$

$\cancel{a+\dots\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}$ $\qquad \cos = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$a\left(1+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{ab^2}{a^2+b^2} = a\,\frac{2a^2+b^2+b^2}{a^2+b^2} = 2a$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$$

$$a\,\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{a^2+b^2} = b$$

$\frac{v}{u} = \frac{b}{2a}$ $\qquad \sin\theta = \frac{3}{5}$

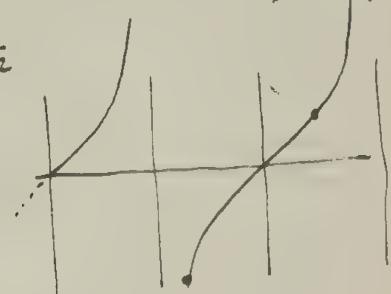
$$\frac{1-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}{3+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}} = \frac{4}{22}$$

$tg = \frac{3}{4}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \cancel{\dots} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \frac{a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{b}{2\sqrt{2}} = \frac{3a-b}{2\sqrt{2}}$

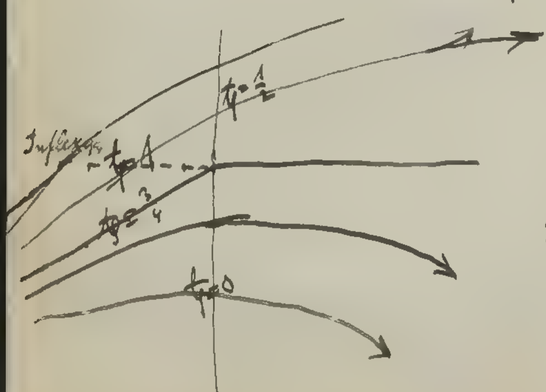
$\cos\frac{\theta}{2} = \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2\sqrt{2}}$



$tg\frac{\theta}{2} = -3$ $\qquad tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$$tg\,\theta = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}$$



$\left(a\,\cos\frac{\theta}{2}+b\,\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$

$$\frac{v}{u} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}+\frac{\sin\theta}{2}}{1+\frac{\sin\theta}{2}+\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{3+\cos\theta+\sin\theta} = \frac{(2+\sin\theta)-(1+\cos\theta)}{(2+\cos\theta)+(1+\sin\theta)}$$

$$1+3\cos^2 \qquad\qquad b^2\sin^2$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\left\{a^2\left(\cancel{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)+\cancel{b^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}\right.$$

$$\left.+2ab\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,2\left(\cancel{(1+\cos^2)+\sin^2\cos}\right)\right)\right\}$$

$$u^2+v^2=\sin^2\frac{\theta}{2}\left\{a^2\left(1+3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+4ab\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$u = -\frac{4r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^4}\right)\right] - 4\sqrt{r_1 r_2}\, \sin\left(\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$u = -4r\sin\theta\left[2 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^4}\right] + 4\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r}$$

$$v = 4r\cos\theta\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{4\sin^2\theta\cos\theta}{r}$$

$$u = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{r} = \frac{x^2 y}{r^4}$$

$$v = \frac{4\sin^2\theta\cos\theta}{r} = \frac{xy^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{r^4} - \frac{x^2}{r^4} - \cancel{\frac{4xy}{r^6} + \frac{4x^2y^2}{r^6}}$$

$$= -\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$4c^2\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\theta}{\cancel{x}}\, x\, d\varphi = 2c^2\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= c^2(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$= c^2\left[(\pi - 2\varphi) - \sin(\pi - 2\varphi)\right]$$

$$= c^2(\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$u = -4\sqrt{1-r^2}$$

$$\int_0^1 u\,dx = -4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = -\pi$$

Sym:

$$u = \frac{xy^2}{r^4}$$

$$v = \frac{y^3}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{-\frac{4xy^3}{r^6} + \frac{4xy^3}{r^6}} - \frac{2xy}{r^4}$$

$$\lim_{r=0} \xi = \infty$$

$$u = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$$

$$v = -\frac{4xy^3}{r^6}$$

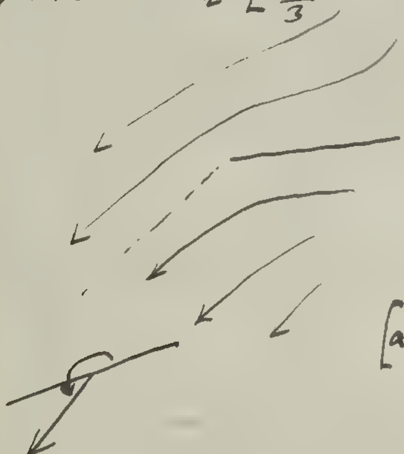
$u = \sqrt{r}\left[a \cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + b \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$ $a\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + b\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$v = \sqrt{r}\left[a \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + b\sin^3\frac{\theta}{2}\right]$ $a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$

$\psi = \sqrt{r}^3 \sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{b}{3}\sin^2\frac{\theta}{2} + a\cos\frac{\theta}{2}\right]$

$\frac{v}{u} = \tan(\theta-\alpha) = \tan\theta$



$$\frac{\left(a\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}}{a + \left(a\cos\frac{\theta}{2}+b\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}$$

$$\left[a\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right]\left[\underbrace{\cos\theta - 2\cos^2\frac{\theta}{2}}_{-1}\right] = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$b\sin\frac{\theta}{2} = -3a\cos\frac{\theta}{2}$

$a\tan\frac{\theta}{2} - b = -\frac{b}{3} - b$

$\tan\frac{\theta}{2} = -\cancel{\frac{b}{3a}} - \frac{3a}{b}$

$\sin^2\frac{\theta}{2}$

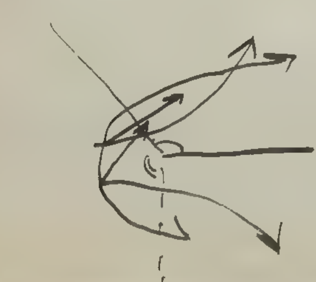
$\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r(1-\cos\theta)}{2}}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sqrt{r-x}\right) = \frac{y(\cos\theta-1)}{\sqrt{r-x}} = \frac{-\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\sqrt{r-x} + \frac{y^2}{2r\sqrt{r-x}} = \sin\frac{\theta}{2} + \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}}$

$\left(\sqrt{r-x}\right)^3$ $\frac{3}{2}\sqrt{r-x}\cdot\frac{\frac{x}{r}-1}{\frac{y}{r}}$

$\sin\frac{\theta}{2}\frac{(\cos\theta-1)}{\sin\theta}$ $\sin^3\frac{\theta}{2}$ $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$



$\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{a}{b}$

$v = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$ $\qquad u = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)$

$= f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) \quad \Big\| \quad \frac{1}{i}\left[f(\beta) - f(\alpha) + \beta f'(\beta) - \alpha f'(\beta)\right]$

$g(\alpha) + g(\beta) \qquad \frac{1}{i}(g'(\alpha) - g(\beta))$

$f(\alpha) + \alpha f'(\beta)$ end.

$f(\beta) + \beta f'(\alpha)$ end.

$\frac{f(x+iy)}{x+iy} + f(x-iy)$

$\alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) = x M + y N = r\left[M \cos\theta - N \sin\theta\right]$

$f(\alpha) = M + iN$

$f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

$\underbrace{\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)}_{\frac{d}{d\alpha}[\alpha f(\alpha)]} = 0$

$\alpha f(\alpha) = c$

$f(\alpha) = \frac{c}{\alpha}$

$u = -\left\{\frac{\left(\sqrt{\alpha^2 - c^2} - \sqrt{\beta^2 - c^2}\right)}{i}\right\} - y\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}}\right)$

$\frac{\alpha}{\beta}$

$= -\sqrt{r_1 r_2}\, \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - y\, \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\, \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}$

$-\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2} = -\frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2}$

$\frac{\sin 2\theta}{r^2}$

$\psi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2\cos 2\theta$

$u = \cdot$

$= \frac{2}{\alpha \, 5 r} \, {}_{2}\,0 = \alpha \rho \;\; \theta \cdots \alpha r \; {}_{2}\,{}^{0}\!\!\int_{\frac{2}{2}}$

$$\frac{x^2}{\lambda^2-1} + \frac{z^2}{\lambda^2} = h^2 \qquad \frac{x^2\lambda^2 + z^2\lambda^2 - z^2}{h^2} = (\lambda^4 - \lambda^2)$$

$$\lambda^4 - \lambda^2\left(1 + \frac{x^2+z^2}{h^2}\right) + \frac{z^2}{h^2} = 0 \qquad \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+z^2}{h^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{x^2+z^2}{h^2}\right) - \frac{z^2}{h^2}}$$

$$p_1^2 q_1^2 = \frac{z^2}{h^2} \qquad z = hpq$$

$$p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2+z^2}{h^2} = 1 + \frac{x^2}{h^2} + p^2q^2$$

$$x = h\sqrt{p^2+q^2-1-p^2q^2} = ih\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}$$

$$h^2(\lambda^2 - 1) = a^2$$

$$\underline{h^2\lambda^2 = -b^2}$$

$$\underbrace{-h^2}_{=c^2} = a^2 + b^2$$

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{c}} = q$$

$$x = c + \xi = ih + \xi$$

$$x^2 = -h^2 + 2ih\xi + \xi^2$$

$$x^2 = c^2 + 2c\xi + \xi^2$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ q^2 \end{matrix} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{c^2 + 2c\xi + \xi^2 + z^2}{c^2}\right] \pm \sqrt{\cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{2\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{c^2}\right)\right] \pm$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ q^2 \end{matrix} = -\left(\frac{\xi}{c} + \frac{z^2}{2c^2}\right) \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\xi}{c} + \frac{z^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}}}_{= \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + \frac{\xi z^2}{c^3} + \frac{z^4}{4c^4}}}$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ q^2 \end{matrix} = -\frac{\xi}{c} \pm \frac{r}{c}$$

$$p^2 = r - \xi$$

$q = 1$ dla [illegible]

$$\rho^2 = \left[1 + \frac{\xi}{k} + \frac{\xi^2+z^2}{2k^2}\right]\left\{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{z^2}{k^2}}{1+\cdots}\right)^2}\right\}$$

$$\psi = (r - r\cos\theta)^{3/2} \quad = h^2 \rho^3$$

$$\sqrt{r - r\cos\theta} = \rho\, h^{2/3}$$

$$\rho^2 = \frac{r - r\cos\theta}{h^{4/3}}$$

$$1 \pm \frac{3}{2}\frac{\xi}{k}$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2} = -c^2$$

$$x^2\lambda^2 + z^2\lambda^2 - z^2 = -c^2\,\lambda^2(\lambda^2-1)$$

$$\lambda^4 + \lambda^2\left(\frac{x^2+z^2-c^2}{c^2}\right) = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{x^2+z^2}{c^2}\right)\left[1 \pm (1 \cdots + \cdots)\right]$$

$$x = c + \xi$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 1 + \frac{2\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{c^2}\right)\left[1 \pm \sqrt{\cdots}\right]$$

$$= \left[\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}\right]\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}\right]\frac{z^4}{\left(\xi^2 + \frac{(\xi^2+z^2)\xi}{c} + \cdots\right.}$$

$$\rho^2 = -\frac{z^4}{c^3\xi}$$

$$\rho^2 = \frac{h^2 + x^2 + z^2}{2h^2} \pm \sqrt{(\quad)^2 - \frac{z^4}{\lambda^4}}$$

$$x = h\sqrt{\lambda^2-1} + \xi$$

$$x^2 =$$

$$\omega^2 = -h^2(1-\rho^2)\left(1 - \frac{z^2}{h^2\rho^2}\right) =$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\zeta+\frac{\alpha(H''-S''\alpha)-\beta(H''-S''\beta)}{i}-i\,\frac{\alpha(H''-S''\alpha)-\beta(H''-S''\beta)}{1}$$

$$-\left[\frac{f'(\alpha)-f'(\beta)}{i}\right]-i\left[\frac{f'(\alpha)-f'(\beta)}{1}\right].$$

$$H'-S'\alpha=\frac{\xi-i\zeta}{4}$$

$$H''-S''\alpha=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}-i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$H''-S''\beta=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$\frac{1}{8i}\left\{(x+iy)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-(x-iy)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right\}$$

$$+\frac{x}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{2}\left[y\frac{\partial\xi}{\partial x}-x\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{x}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$z=\frac{e^{X'}-e^{-X'}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1+\beta^2}\right)\qquad\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$1=X''\left(\frac{e^{X'}+e^{-X'}}{2}\right)$$

$$\overbrace{H''-S''}^{X''}=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$X''=\frac{1}{\frac{e^{X'}+e^{-X'}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2X'}+e^{-2X'}+2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\sinh\varphi}{y\cosh\varphi}=\frac{1}{\cosh\varphi\sinh\varphi}$$

$x=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$

$$-\left[\frac{2x^2\sinh\varphi}{\cosh^3\varphi}+\frac{2y^2}{\sinh^3\varphi}\cosh\varphi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{2y}{\sinh^2\varphi}=0$$

$$\frac{x^2}{(\cosh\varphi)^2}+\frac{y^2}{(\sinh\varphi)^2}=1=\frac{x^2}{\sinh^2\varphi+1}+\frac{y^2}{\sinh^2\varphi}$$

$$\int \underline{\arcsin \cancel{x}\, d\cancel{x}} = x \arcsin \frac{x}{i} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}}$$

$$=$$

$$\cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \arcsin - \cancel{\frac{x}{\quad}}$$

$$4\left(H-G\right)^{(2)} = \frac{(x+iy)}{\cancel{2}} \cancel{\arcsin} \frac{x+iy}{i} + i\sqrt{1-\left(\frac{x+iy}{i}\right)^2}$$

$$\frac{z}{i} \arcsin \frac{z}{i} + \sqrt{\cancel{1}\,1+\frac{z^2}{\cancel{2}}}\,i$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cancel{\frac{1}{i}\arcsin}\ \frac{1}{\cancel{i}} \arcsin \frac{z}{i} + \cancel{\frac{z}{i^2}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= (x+iy)(\xi+i\mu) + i\sqrt{1+x^2-y^2+2ixy}$$

$$= x\xi - y\mu + i(\mu x+\xi y) + \underbrace{\quad\quad}_{Re^{i\theta}} \quad \sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$R\cos\theta = 1+x^2-y^2 \qquad \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$4R(H-G) = x\xi - y\mu - \sqrt{\frac{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - 1 - x^2 + y^2}{2}} \quad R\sin\theta = 2xy$$

N.p. $G = +3H$

$$\underset{y=0}{\varphi} = \frac{x\xi}{4} - \frac{x\xi}{4} + \cancel{xx} + \sqrt{\frac{1}{2}\left[\underbrace{\sqrt{(1+x^2-\ )^2+4xy\ldots}}_{y=0\ =\ 0} - (x^2+y^2)\right]}$$

$$=0$$

$$=\sqrt{\quad}$$

~~$y + i x = \sinh(\mu + i\xi)$~~

$y = \sin h\mu \cos\xi$

$x = \cos h\mu \sin\xi$

$$\frac{x^2}{\sin^2 h\mu} + \frac{y^2}{\cos^2 h\mu} = 1$$

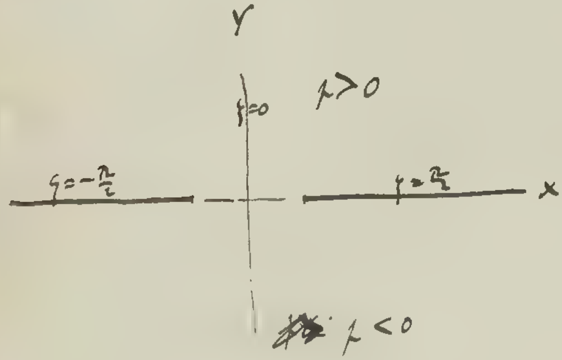
$$\frac{y^2}{\sin^2\xi} - \frac{x^2}{\cos^2\xi} = 1$$

$x + iy = i \sin(\xi + i\mu)$

$$= \frac{e^{i\xi-\mu} - e^{-i\xi+\mu}}{2}$$

$$= \frac{e^{-\mu}(\cos\xi + i\sin\xi) - e^{\mu}(\cos\xi - i\sin\xi)}{2}$$

$$= i\sin\xi\,\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{2} \;\; \cos\xi\,\frac{e^{-\mu}+e^{\mu}}{2}$$



$$\xi + i\mu = \arcsin\frac{x+iy}{i}$$

$$= 4(H'-S')(x+iy)$$

~~$y=0 \quad 4(H'-S')(x) = \arcsin\frac{x}{i}$~~

~~$4(H'-S')x = \arcsin\frac{x}{i}$~~

$z = re^{i\theta}$

$y = 0 \qquad u = 0$

$$v = x\,R(H'-S')\Big|_{y=0} + 2\,RH\Big|_{y=0}$$

$$4(H'-S')(x+iy) = \arcsin\frac{x+iy}{i}$$

$$= \arcsin\frac{x}{i}$$

~~$x = i\sin 4(H'-S')(x+y) \ldots J(H'-S')$~~

~~$x = \sin 4R(H'-S')\ \frac{e^{4J(H'-S')} - e^{-4J}}{2}$~~

~~$x+iy = i\sin 4(H'-S') = i\sin[4R(H'-S') + i\,4J(H'-S')]$~~

~~$$= i\,\frac{e^{i4(H'-S')} - e^{-i4(H'-S')}}{2i}$$~~

~~$$= \frac{e^{4iR(H'-S') - 4J(H'-S')} - e^{-4iR(H'-S') + 4J(H'-S')}}{2}$$~~

~~$\arcsin\left(\frac{x}{i}+y\right) = R + iJ$~~

~~$\frac{x}{i} = \sin(R + iJ)$~~

~~$x + iy =$~~

~~$x = -\cosh J \sin R$~~

~~$y = -\cosh J \cos R$~~

~~$$\frac{y^2}{\sin^2 R} - \frac{x^2}{\cos^2 R} = 1$$~~

$$R(H'-S') = \frac{\xi}{4}$$

$$v = \frac{x}{4}\xi + 2RH\Big|_{y=0}$$

$(x+iy)(\eta + i\theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = -\cancel{\lg r} - \cancel{\frac{x^2}{r^2}} + \frac{y^2}{y^2 + \frac{x^2}{r^2}}$$

$$+ \cancel{\lg r} + \cancel{\frac{y^2}{r^2}} + \frac{x^2}{y^2+\frac{x^2}{r^2}}$$

$$\lg r + \frac{x^2}{r^2} +$$

$$-\lg r - \frac{y^2}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{yx}{r^2} - \cancel{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} - \frac{xy}{y^2+\frac{x^2}{r^2}} - \frac{\pi}{2}$$

$$-\left[-\frac{xy}{r^2} - \cancel{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} + \frac{yx}{y^2+\frac{x^2}{r^2}}\right] + \pi = 0$$

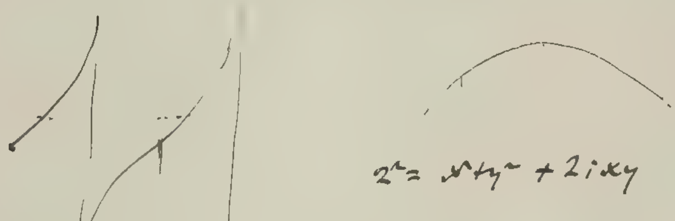
$x=0 \quad | \quad y=0$

$u = -x\lg x$

$v = y \lg y$

$v = + x\frac{\pi}{2}$

$u = y\pi$



$z^2 = x^2 + y^2 + 2ixy$

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad 2x$

$v = \quad 2y$

$$y = \frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho + 1} = \frac{2\sin\rho\cos\rho}{2\cos^2\rho} = \operatorname{tg}\rho \quad < 1$$

$$x = \frac{0}{\cos 2\rho + 1} : \infty$$

$x = \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (1+\frac{\eta^2}{\xi^2})\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\left[(1+\frac{\eta^2}{\xi^2})\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho + \cos 2\alpha} > 1$$

$\sin 2\rho > \cos 2\rho + \cos 2\alpha$

$2\sin\rho\cos\rho - 2\sin^2\rho(\rho+1) > \cos 2\alpha$

$\sin\rho(\cos\rho - \sin\rho) > \cancel{\cos 2\alpha}$

$> \frac{1}{2}\cos\alpha$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin 2\rho}{\sin 2\alpha}$$

$$y = \frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}} = \infty$$

$$y = \frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho - 1}$$

$$-\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^2} - \frac{2z^2}{(1+z^2)^2}$$

$\sin\theta\cos\theta = \cos\theta[(n-1)\theta + \theta]$

$= \cos(n-1)\theta\sin\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta$

$x = \frac{\pi}{2}$

$$a e^{-\alpha x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right) + b e^{-\alpha(l-x)} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{l-x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\frac{t}{\tau}\left(a e^{-\alpha x}\cos\frac{x}{\lambda} + b\cos\frac{l-x}{\lambda}\right)$$

$$-\cos 2\pi\frac{t}{\tau}\left(a\sin\frac{x}{\lambda} + b\sin\frac{l-x}{\lambda}\right)$$

$$J^2 = \left[a e^{-\alpha x}\cos\frac{x}{\lambda} + b e^{-\alpha(l-x)}\cos\frac{l-x}{\lambda}\right]^2 + \left[a e^{-\alpha x}\sin\frac{x}{\lambda} + b e^{-\alpha(l-x)}\sin\frac{l-x}{\lambda}\right]^2 =$$

$$= a^2 e^{-2\alpha x} + b^2 e^{-2\alpha(l-x)} + 2ab\, e^{-\alpha l}\underbrace{\left(\cos\frac{x}{\lambda}\cos\frac{l-x}{\lambda} + \sin\frac{x}{\lambda}\sin\frac{l-x}{\lambda}\right)}_{\cos\frac{2x-l}{\lambda}}$$

In Punkten gilt $\cos\frac{2x-l}{\lambda} = \pm 1$

$$J^2 = \left[a e^{-\alpha x} \pm b e^{-\alpha(l-x)}\right]^2$$

$$\log\frac{a}{b} = \log r_1 \ldots$$

$$\alpha = \frac{\log r_1 - \log r_2 - \log r_3 + \log r_4}{\log(r_2-r_1) - \log(r_4-r_3)}$$

$$= \frac{\log\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3}}{\log\frac{r_2-r_1}{r_4-r_3}}$$

$$\sigma = e^{i\nu t - \beta x}$$

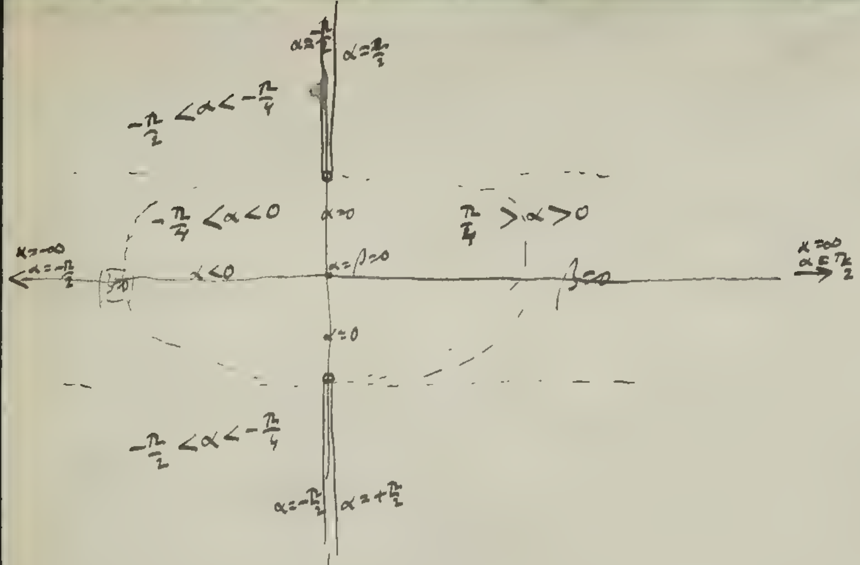
$$-\nu^2 = -a^2\beta^2 + i\frac{4\mu}{3\rho_0}\nu\beta^2$$

$$\beta = \nu + i\kappa$$

$$+\alpha^2 = +a^2[\nu^2 - \kappa^2] + \frac{8\mu}{3\rho_0}\alpha\nu\kappa$$

$$0 = -2a^2\nu\kappa + \frac{4\mu}{3\rho_0}\alpha(\nu^2 - \kappa^2)$$

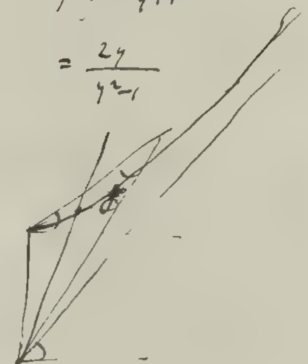
$$\alpha^2 = a^2(\nu^2 - \kappa^2) + \frac{8\mu}{3\rho_0}\alpha\frac{4\mu}{3\rho_0}\alpha\frac{\nu^2-\kappa^2}{2a^2}$$



$1-y-1-y$

$$-\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{-2y}{1-y^2}$$

$$\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} = \frac{2y}{y^2-1}$$



$\theta_1 - \theta_2 = \rho$

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

$x=0$		$y=0$
$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$	
$u = +\frac{2y}{y^2-1} - \beta - \frac{y}{y^2-1}$; $v = \frac{\pi}{2}$	$u = -\frac{2y}{y^2-1}$; $v = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{r_1} + \frac{x}{r_2}\right)$	$u = 0$; $v = \frac{2x\cos 2\theta}{r_1 r_2} + \operatorname{arctg} x - \frac{\cos\theta}{r_1}$

$$= \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{x}{x^2+1}$$

$y=0$

$u=0$

$v=$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = -\frac{2}{(x^2+1)^2}$$

$$\overline{(2+i)^2} \quad \overline{(2-i)^2}$$

$$\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \quad \frac{y-1-y-1}{y^2-1}$$

$\frac{1+\cos\theta}{2}$

$u = \sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\,(3+\cos\theta)$

$v = \sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\theta$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{x}{r}\,\sin\frac{\theta}{2}(3+\cos\theta) - \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\frac{\theta}{2}(3+\cos\theta) - 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right]\sin\theta$

$= \frac{1}{2\sqrt{r}}\Big\{3\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cancel{\;}\sin\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\theta + \cancel{\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}\Big\}$

$+ \underbrace{\cancel{\sin\theta\sin\frac{2\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}}_{\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta - \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta$

$- 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$\cancel{3\cos\frac{\theta}{2}} - 3\sin^3\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 5\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \cancel{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}} +$

$+ \cancel{6\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} + \cancel{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}} - \cancel{2\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} - \cancel{\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} + \sin^5\frac{\theta}{2}$

$= -2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha + \cancel{\sin\alpha} + 4\sin^3\alpha\cos^2\alpha$

$= 2\sin^3\alpha\left[1 - 2\cos^2\alpha\right] + \sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$

$= 2\sin^3\alpha\cos 2\alpha + \text{—} \qquad = \sin\alpha\left[2\sin^2\alpha\cos 2\alpha + \underbrace{1 - 2\cos^2\alpha}_{-\cos 2\alpha} - \cos^2\alpha\right]$

$= \sin\alpha\left[+(1-\cos 2\alpha)\cos 2\alpha - \cos 2\alpha - 2(1+\cos 2\alpha)\right]$

$-\cos^2 2\alpha - 2 - 2\cos 2\alpha$

$2 + 2\cos\beta - \cos^2\beta = 3 - (1-\cos\beta)^2$

$$u = \sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\left[3+\cos\theta\right] = \sqrt{r}\,\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\left[\cdots\right]$$

$$u = \sqrt{\frac{r-x}{\cancel{2}}}\left[3+\frac{x}{r}\right]$$

$$v = \sqrt{r-x}\;\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}\left(3+\frac{x}{r}\right) + \sqrt{r-x}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r-x}}\,\frac{y}{r} + \sqrt{r-x}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r-x}}\left[\frac{2x}{r}-2+\cancel{\frac{x^2}{r^2}}-\cancel{\frac{x}{r}}+\cancel{\frac{y^2}{r^2}}+\frac{2(r-x)}{r}\right]$$

$$\frac{2x-2r}{r}+\frac{2r-2x}{r} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}\,\frac{y}{r} - \sqrt{r-x}\,\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r-x}}\left(3+\frac{x}{r}\right) - \sqrt{r-x}\,\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r-x}}\left[\cancel{\frac{xy}{r^2}}-\frac{y}{r}-\frac{3y}{r}-\cancel{\frac{xy}{r^2}}\right] = \frac{-2y}{r\sqrt{r-x}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\,\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{r+x}{r}} = \frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\int\frac{u\,\alpha}{\pi\,r}\;\cdot r\,d\varphi \ldots = \frac{u\,\alpha}{\pi}\,\log r$$

gdyby skończona różnica ciśnień, to praca byłaby ∞

podobnie gdy w przestrzeni:

$$\frac{u\,\alpha^2}{\ldots r^2}\ldots$$

$$\cancel{\tfrac{\partial u}{\partial x}}\quad u = -\sqrt{r}\left[\frac{y}{r}\cos\frac{\theta}{2} + 5\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$v = \sqrt{r}\left[\frac{x}{r}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right] = \left[\frac{x}{r}-1\right]\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$u = -\sqrt{r}\left[\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + 5\sin\frac{\theta}{2}\right] = -\sqrt{r}\left[2\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 5\sin\frac{\theta}{2}\right] = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\left[\overbrace{2\cos^2\frac{\theta}{2}}^{=1+\cos\theta} + 5\right] =$$

$$\cancel{u = \frac{y}{2\sqrt{r}}}$$

$$\cancel{\sqrt{x-r}\,\frac{x-r}{\sqrt{r-x}} = -\sqrt{r-x}}$$

$$u = -\sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{r-x}{2}}$$

$$v = -\sqrt{r}\,\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{r+x}{2}}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{r+x}}{r}\;\frac{y}{r\sqrt{r+x}} = \frac{\sqrt{r^2-x^2}+y}{r}}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{1}{2}\;\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r+x}}\end{aligned}\right\} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\left(\frac{x}{r}-1\right)\sqrt{r+x} + \frac{y}{r}\sqrt{r-x}}{r\sqrt{r^2-x^2}}\right\}$$

$$\left(\frac{\cos\theta-1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$u = -\frac{y}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}.\qquad \cancel{u} = -\frac{y}{2\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r+x}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\;y\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{x}{r^2}}$$

$$v = \frac{x}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{x}{2r}\sqrt{\frac{r+x}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{x}{r^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[+\frac{yx}{r^3}\sqrt{r+x} - \frac{y}{2r^2}\,\frac{\frac{x}{r}+1}{\sqrt{r+x}}\right] = \frac{\sqrt{r+x}}{2\sqrt{2}}\;\frac{y}{r^2}\left[\frac{x}{r}-\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{xy}{r^3}\sqrt{r+x} + \frac{x}{2r^2}\,\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{x+r}}\right] = \frac{}{2\sqrt{2}\,r^3\sqrt{r+x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{r+x}\;y}{r^2} + \frac{xy}{r^3\sqrt{r+x}}\right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\,r^3\sqrt{r+x}}\left[-y(x+r) + xy\right]$$

$$= \frac{-y}{4\sqrt{2}\;r\sqrt{r+x}}$$

$u = \cancel{M}\,\frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$

$v = \frac{4y^3x}{r^6}$

$u = \frac{y^2(y^2-3x^2)}{r^6}$

$u = \frac{2xy}{r^4} - \frac{4x^3y}{r^6}$

$v = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$

$u = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} - \frac{4\sin^3\theta\cos\theta}{r^2}$

$v = \frac{\sin^2\theta}{r^2} - \frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^4}$

$v_r = u\cos\theta + v\sin\theta$

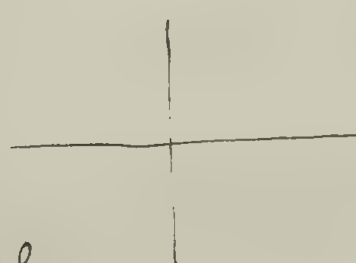
$$= r\int_0^{\pi} \frac{2\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta}{r^2} - 8\,\frac{\sin^3\theta\cos^2\theta + \ldots}{r^2}\,d\theta$$

$\frac{p - i\xi}{y} = \log z = \log r + i\theta$

$\xi = -y\theta$

$x + iy$

$u =$



$u = +2y\theta + M + Rf$

$v = -2x\theta + 2y - Jf$

$\theta = 0:\quad u = 0,\ v = 0$

$\theta = 2\pi\quad u = 0,\ v = -4\pi x$

$\theta = \frac{\pi}{2}\quad u = \pi y,\ v = y$

$u = 2\frac{\partial\beta}{\partial x}\,y$

$p = 4\frac{\partial\alpha}{\partial x}$

$\xi = -4\frac{\partial\beta}{\partial x}$

$y = \operatorname{tgh}\beta$

$= \frac{\sinh\beta}{\cosh\beta}$

$v = -2\beta - 2x\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\sin\theta_1}{r_1} - \frac{\sin\theta_2}{r_2}$

$\frac{dy}{d\beta} = 1 - \frac{\sinh^2\beta}{\cosh^2\beta}$

$= 1 - y^2$

$\cancel{\theta = \frac{2\cosh 2\beta\,\frac{\partial\beta}{\partial x}}{\cosh 2\beta + \cos 2\alpha}}$

$\operatorname{artg}(\overbrace{x+iy}^{z}) = \alpha + i\beta$

$\frac{d\beta}{dy} = \frac{1}{1-y^2}$

$\frac{1}{1+z^2}\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x} =$

$\frac{1}{1+x^2-y^2+2ixy}$

$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2}$

$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{-2xy}{(1+x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2}$

$x=0:$ $u=0$

$v = -2\beta$

$-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

-2β

$-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$

$y=0$ $u=0$

$v=0$

$y = \operatorname{ctgh}\beta$

$\frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}$

$v = -2\operatorname{arctgh} y + \underbrace{\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}}_{\frac{2y}{1-y^2}}$

$\frac{dy}{d\beta} = +1 - \frac{\cosh^2\beta}{\sinh^2\beta}$

$= 1 - y^2$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2}{1-y^2} + \frac{2y}{1-y^2} = 2\frac{-1+y}{1-y^2} = -\frac{2}{1+y}$

$\frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{y^2-1}$

zatem $v<0$

$v = -2\operatorname{arcctgh} y - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{y^2-1} - \frac{2y}{y^2-1} = 2\frac{1-y}{y^2-1} = -\frac{2}{1+y}$

16

$$u = -\sqrt{\frac{r-x}{2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}} - \frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r+x}}\right]$$

$$v = +\sqrt{\frac{r+x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}\,r}\left[-\sqrt{r-x} - \frac{y}{\sqrt{r+x}}\right] = \frac{\cancel{x}\ 2y}{2\sqrt{2}.\,r\,\sqrt{r+x}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2}\,r\sqrt{r+x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{\ }-\frac{x}{r^3}\sqrt{\left(\frac{r-x}{2}\right)^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^2},\sqrt{\frac{r-x}{2}}\ \frac{\cancel{x}-r}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{r-x}\,(r-x)}{\sqrt{8}\,.\,r^2}\left[-\frac{x}{r}\ \cancel{\ } - \frac{3}{2}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cancel{\ } + \frac{y}{r^3}\sqrt{\frac{(r+x)(r-x)^2}{8}}\ \cancel{\ } - \frac{1}{2}\ \frac{1}{r\sqrt{8}}\ \frac{\frac{y}{r}(r-x)^2 + 2(r^2-x^2)\frac{y}{r}}{\sqrt{(r+x)(r-x)^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{8}\,r^3}\ \frac{(r+x)(r-x)^{\cancel{2}} - \frac{1}{2}r\left[\cancel{\ }(r-x) + 2(r+x)\right]\cancel{(r-x)}}{\sqrt{(r+x)\cancel{(r-x)^2}}}$$

$$2r^2 - 2x^2 - r(3r+x) = -\frac{r^2 - rx - 2x^2}{2\sqrt{r+x}}$$

$$= \frac{-}{r^3\sqrt{8}}\left\{\frac{\sqrt{r-x}\,(r-x)\left[x + \frac{3}{2r}\right]2\sqrt{r+x} + (r^2+rx+2x^2)\,y}{2\sqrt{r+x}}\right\}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} + \frac{1+z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} \qquad |1-z|^2$$

$$\frac{2z\,dz}{(1-z)^2} = \text{———}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{xy}{r^3} \quad \Big| \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{x}{r}\sin^3\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{r}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{2} + 3\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$+\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{y}{r}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{r}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right]\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right]\cos\theta\right]$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\Big[2\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{2} - 4\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} -}$$

$$\cancel{- 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta\Big]}$$

$$\cancel{= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}\left[\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2} - \underbrace{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}_{\sin^2\theta - \cos^2\theta} - \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\right]}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r\sqrt{r}}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\right] + \frac{2}{\sqrt{r}}\left[2\cos^3\frac{\theta}{2} - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right]\frac{\sin\theta}{r}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{r}}\Big\{ 2\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta + 2\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\theta - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

$$- \cancel{\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta\Big\}$$

$$\cos\theta\Big\{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2} + \cancel{\sin\frac{\theta}{2}} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^3\frac{\theta}{2}\Big\} + \sin\theta$$

Ergänzungen ~~[illegible]~~

$$H = -g = \frac{1}{8}\left\{ z \operatorname{arcsinh} z - \sqrt{1+z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ (x+iy)(p+i\xi) - \sqrt{1+(x+iy)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ px + \xi y + i(py - \xi x) - \sqrt{\underbrace{1+x^2-y^2+2ixy}_{Re^{i\theta}}} \right\}$$

$$= \sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{R}\left\{ \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + 1+x^2-y^2\right]} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - (1+x^2-y^2)\right]}$$

$$u = \underbrace{\frac{\cancel{xp} - \xi y}{4} - \frac{\cancel{px} + \xi y}{4}}_{-\frac{\xi y}{2}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + 1+x^2-y^2\right]}}_{\sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$v = \underbrace{\frac{\cancel{py} + \xi x}{4} - \frac{\cancel{py} - \xi x}{4}}_{\frac{\xi x}{2}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - (1+x^2-y^2)\right]}}_{\sqrt{R}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$x=0$

$+\sqrt{1-y^2}$ für $y<1$

für $y>1$

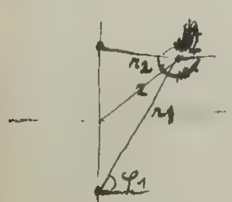
respect $\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-y^2}+1-y^2\right)} = 0$

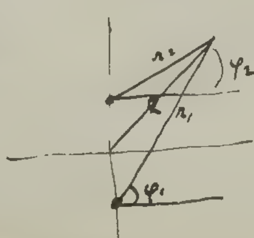
$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(1-y^2) - (1-y^2)\right]} = 0 \quad y<1$

$v = \sqrt{y^2-1} \quad y>1$

$$\sqrt{z^2+1} = \underbrace{\sqrt{z+i}}_{\sqrt{r_1}}\ \underbrace{\sqrt{z-i}}_{\sqrt{r_2}} = \sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\left\{\left[\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\right] + i\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} + \cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\right]\right\}$$





$$R\left(\sqrt{z^2+1}\right)\Big|^{x=0}_{y<1} = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{2}}$$

$$y>1 \quad = -\sqrt{\cdots}$$

$$I\left(\sqrt{z^2+1}\right)\Big|^{x=0} = 0$$

$$\int i \arcsin \frac{x+iy}{i}$$

$$F = \int i \arcsin \frac{z}{i}\, dz = -\int \arcsin \frac{z}{i}\, d\left(\frac{z}{i}\right)$$

$$= -\arcsin \frac{z}{i} \cdot \frac{z}{i} - \int \frac{z}{i} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= -\frac{z}{i} \arcsin \frac{z}{i} - \sqrt{1+z^2}$$

$$R\, F = R\left\{ z(p - i\xi) - \sqrt{1+z^2} \right\} = xp + y\xi - R\sqrt{1+z^2}$$

$$J \quad = -x\xi + py - J\sqrt{1+z^2}$$

$$f = \frac{F}{2}$$

$$u = \frac{xp}{2} - \frac{1}{2} R\sqrt{1+z^2}$$

$$v = x\xi - \frac{py}{2} + \frac{\xi}{2} J\sqrt{1+z^2}$$

$$\Big|^{x=0} = 0$$

$$-\frac{py}{2} + \ldots$$

$$\frac{e^{p-i\xi} - e^{-p+i\xi}}{2} =$$

$$\frac{e^{p}(\cos\xi - i\sin\xi) - e^{-p}(\cos\xi + i\sin\xi)}{2}$$

$$\cos\xi\, \frac{(e^{p} - e^{-p})}{2} - i \sin\xi\, \frac{e^{p}+e^{-p}}{2}$$

78

$\xi = \frac{\pi}{2}$

$\xi = 0 \quad X$

$\xi = -\frac{\pi}{2}$

$x + iy = \sinh(\rho + i\xi)$

$x = \sinh\rho \cos\xi$

$y = \cosh\rho \sin\xi$

$\rho + i\xi = \operatorname{arc\,sinh}(x+iy)$

$8X' = \operatorname{arcsinh}$

$2X' = H' - S'$

$H - S = \frac{1}{4}\int \operatorname{arcsinh} z \, dz$

$\int \operatorname{arc\,sinh} z \, dz = F(z)$

$\operatorname{arcsinh} z = F'(z)$

$z = \sinh[F'(z)] = \frac{e^{F'(z)} - e^{-F'(z)}}{2}$

$\sinh z = i \sin \frac{z}{i}$

$z = i \arcsin\left(\frac{\sinh z}{i}\right)$

$\operatorname{arcsinh} = i \arcsin \frac{}{i}$

$z = \Phi[\overbrace{\int \operatorname{arcsin}}^{F}]$

$1 = \operatorname{arcsinh} z . \Phi'[\overbrace{\int \cdots}^{F}]$

$\frac{d}{dF}[\Phi(F)] = \frac{1}{\operatorname{arcsinh} z} = \cancel{\frac{2}{e^{z} - e^{-z}}} = \cancel{\frac{2}{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}}$

$\operatorname{arcsinh} z = \frac{dF}{d\Phi} = \frac{dF}{dz}$

$z = \sinh \frac{dF}{dz}$

$\cancel{[e^{\Phi} - e^{-\Phi}]\, d\Phi = 2\, dF}$

$\cancel{e^{\Phi} + e^{-\Phi} = 2F + \text{const}}$

$\int \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

$F(z) = i\int \arcsin \frac{z}{i}\, dz = -\int \arcsin \frac{z}{i} \frac{dz}{i}$

$= -\frac{z}{i} \arcsin \frac{z}{i} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{z}{i}\right)^2} = z \operatorname{arcsinh} z - \sqrt{1+z^2}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3x^2}{2r^5} \quad - \frac{9x^2}{2r^5} + \frac{15x^4}{2r^7}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3y^2}{2r^5} \quad - \frac{3x^2}{2r^5} + \frac{15x^2y^2}{2r^7}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3z^2}{2r^5} \quad - \frac{3x^2}{2r^5} + 15 \sim$

$-\frac{3x}{r^5} - \frac{6x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$

$-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$

$\Delta^2 \frac{x^3}{r^5} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{15x^4}{r^7}$

$-\frac{5x^3y}{r^7}$

$\frac{6x}{r^5} - \cancel{\frac{15x^3}{r^7}} - \cancel{\frac{20x^3}{r^7}} + \cancel{\frac{35x^5}{r^9}}$

$-\frac{5x^3}{r^7} \quad + \cancel{\frac{35x^3y^2}{r^7}} \quad = \frac{6x}{r^5} - \frac{10x^3}{r^7}$

$-\frac{5x^3}{r^7} \quad + \cancel{\frac{35x^3z^2}{r^7}}$

$\Delta^2 \frac{x^2y}{r^5} \quad \frac{2xy}{r^5} - \frac{5x^3y}{r^7} \quad \frac{x^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7}$

$\frac{2y}{r^5} - \cancel{\frac{10x^2y}{r^7}} - \cancel{\frac{15x^2y}{r^7}} + \cancel{\frac{35x^4y}{r^9}}$

$-\frac{5x^2y2}{r^7}$

$-\frac{5x^2y}{r^7} - \frac{10x^2y}{r^7} + \cancel{35x^2y^3} \quad = \frac{2y}{r^5} - \frac{10x^2y}{r^7}$

$-\frac{5x^2y}{r^7} \quad + \cancel{\ldots x^2 z^2}$

$\frac{3y}{r^5} - \frac{15x^2y}{r^2}$

73

$$\int \quad = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$H'' - G'' \cdot 2\,dz = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$H' - G' = \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\arccos z$$

$$= \log\left(z + \sqrt{(z+i)(z-i)}\right)$$

$$= \log\left[z + \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}}\right]$$

$$= \log\left[x + \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\left\{y + \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}\right]$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sqrt{r_1 r_2 \frac{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 + x_1 x_2 - y_1 y_2}$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - y_1 x_2 - y_2 x_1}$$

$$\frac{1}{x+iy+i} + \frac{1}{x+iy-i} = \frac{2z}{z^2+1}$$

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1} = \int H'' - G'' \cdot 2\,dz$$

$$\frac{2}{1+z^2} - \frac{4z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{2+2z^2-4z^2}{(1+z^2)^2} = 2\,\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$$

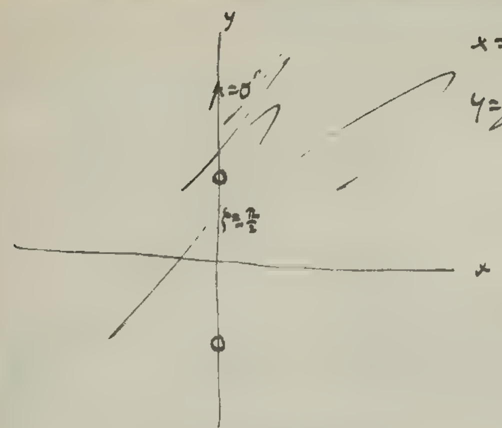
$$\int H'' - G'' \cdot 2\,dz = \frac{1}{z+i} + \cancel{\frac{1}{z+i}}$$

$$H'' - G'' = 2\,(z+i)^2$$

$$r\cos\theta$$

$$\arcsin z = \alpha + i\beta$$

$$\sqrt{z+i}\,\sqrt{z-i} = \sqrt{r_1 r_2}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$



$x = \sinh\mu\cos\xi$

$y = -\cosh\mu\sin\xi$

$u = -\frac{2y}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) \quad = \frac{2y}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}$

$v = \frac{2x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) \quad v =$

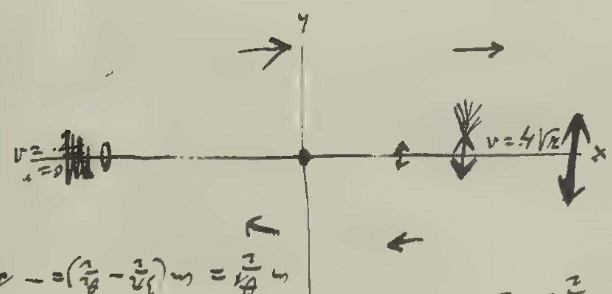
$\theta = \pi$

$u = -\sqrt{2}$

$v =$

$u = +\frac{2y}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}$

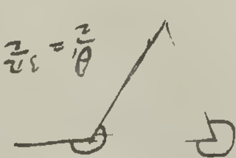
$v = -\frac{2x}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$



$\cos\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{3\pi}{4}$

$-8\sqrt{m_1}\cos^3\frac{\theta_1}{2}$



$\theta_1 - \pi + \theta_2 - \pi = \pi$

$\theta_1 = 3\pi - \theta_2$

$\frac{\theta_1}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}$

$\sin\frac{\theta_1}{2} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) = -\cos\frac{\theta_2}{2}$

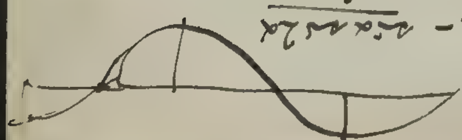
$\cos\frac{\theta_1}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) = -\sin\frac{\theta_2}{2}$

$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2(\cos\alpha - \sin\alpha) - \sin^2\alpha\cos\alpha$

$(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\cos\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)\cos 2\alpha - \frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{2}$

$\cos^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha - \sin^3\alpha$

$= \cos\alpha\left[\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\right]$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2(\cos 2\theta + 1)\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2\sin 2\theta \, \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Sigma \cdot\cdot = \frac{1}{r}\left[+4\cos^2\theta\sin\theta - 4\sin\theta\cos^2\theta\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = +2\sin 2\theta\frac{\sin\theta}{r} + 2(\cos 2\theta + 1)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \frac{4\sin^2\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta}{r} = 4\frac{\cos\theta}{r}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2} - \frac{\cos\theta \cdot x}{r^3}$$

$$\frac{y^2 - x^2}{r^4}$$

$$-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$\cancel{\frac{4xy}{r^4} - \frac{4x^3y}{r^6} + \frac{2xy}{r^4} - \frac{4xy^3}{r^6}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{r^4} - \cancel{\frac{4x^2y^2}{r^6}} - \frac{x^2}{r^4} + \cancel{\frac{4x^2y^2}{r^6}}$$

$$-\left[2(\underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{\cos 2\theta}) - 2\right]\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\sin^2\theta$$

$$\frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6} - \frac{4y^4}{r^6} = 0$$

$$U = \sum \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r}$$

$$\frac{x}{r^3} \qquad \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

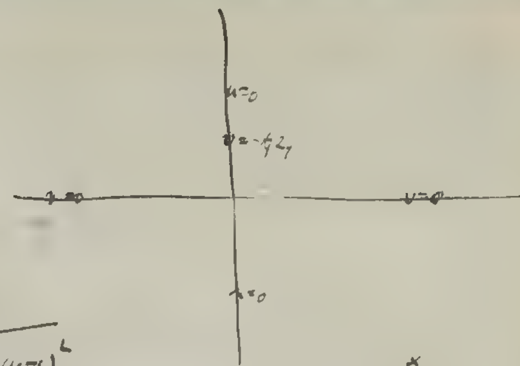
$$-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$$

$$V_2 = \frac{y}{r^4}$$

$$\nabla^2 V_2 = 4\frac{y}{r^6} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^5}\right)\cdot\frac{4}{5}$$

$$\cancel{\frac{x-1}{r_1^2} + \frac{x+1}{r_2^2}} \quad \frac{x-1}{r_1^2} + \frac{x+1}{r_2^2}$$

$$\cancel{-\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2} + \frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} = 0}$$



$$\cancel{v + iu = \lg \frac{z-1}{z+1}} \qquad \cancel{v = \lg \frac{r_1}{r_2}}$$

$$x + iy = \lg \frac{v+iu-1}{v+iu+1} \qquad x = \log \sqrt{\frac{v^2+(u-1)^2}{v^2+(u+1)^2}} \qquad \frac{u-1}{u+1} = e^x$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u-1} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1}$$

$$x = \sinh u \cos v \qquad \cancel{v=0} \quad x = 0 \quad v = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \arcsin y \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases} \;\Bigg|\; u = \begin{matrix} \operatorname{arccosh} y \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} \qquad y = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$y = \cosh u \sin v$$

$$y = 0 \qquad v = 0 \qquad u = \operatorname{arcsinh} x$$

$$\underbrace{\frac{\zeta}{2}\left[-y - ix\right]}_{\frac{\zeta}{2}(x+iy)} + \int_{z=\beta} (H'' - S'') z \, dz \; \cancel{+} f(\alpha) = \cancel{} u - iv$$

$$\frac{\zeta \alpha}{2} + \int_{z=\beta} (H'' - \Theta'') z \, dz + f(\alpha) = 0$$

dla ~~[illegible]~~ [illegible]
tylko typ f do [illegible]!

$$u = \rho X'(\alpha) + \alpha X'(\beta) + \frac{S(\alpha) - S(\beta)}{i}$$

$$v = i[\rho X'(\alpha) - \alpha X'(\beta)] + H(\alpha) + H(\beta)$$

$$\frac{\xi}{2} = H'(\alpha) + H'(\beta) - S(\alpha) - S(\beta) = 2i[X'(\alpha) - X'(\beta)] = -4\,\mathfrak{I}X'$$

$$2[X'(\alpha) + X'(\beta)] = -\left\{\frac{S(\alpha) - S(\beta)}{i} + i[H'(\alpha) - H'(\beta)]\right\}$$

$$i\{H'(\alpha) - H'(\beta) - S(\alpha) + S(\beta)\} = +2[X'(\alpha) + X'(\beta)] = +4\,\mathfrak{R}X'$$

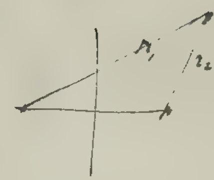
$$4X'(\alpha) = i\{-2H(\beta) + 2S(\beta)\}$$ nicmaline

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4}\left\{p + \cancel{x\frac{\partial p}{\partial x}} - \cancel{y\frac{\partial \xi}{\partial x}} + p + \cancel{y\frac{\partial p}{\partial y}} + \cancel{x\frac{\partial \xi}{\partial y}}\right\} + S'(\alpha) + S'(\beta) + \underbrace{\underbrace{\{H'(\alpha) + H'(\beta)\}}_{2\mathfrak{R}(S' - H')}}_{-4\mathfrak{R}X'} = -\frac{p}{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cancel{y\frac{\partial p}{\partial x}} + \xi + \cancel{x\frac{\partial \xi}{\partial x}} - \cancel{x\frac{\partial \xi}{\partial y}} + \xi + \cancel{x\frac{\partial \xi}{\partial y}}}{4} + \underbrace{\underbrace{2i[H'(\alpha) - H'(\beta)] - 2i[S'(\alpha) - S'(\beta)]}_{2[-\mathfrak{I}H'(\alpha) + \mathfrak{I}S'(\alpha)]}}_{= -4\,\mathfrak{I}(X')} = +\frac{\xi}{2}$$

$$= \xi$$

Zvolíš funkce $(x+iy)$ taky osily



$$\mathcal{R}\, f(x+iy)\Big|_{x=0} = \begin{cases} y\frac{\pi}{4} & y>0 \\ -y\frac{\pi}{4} & y<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z+1)(z-1)} = \sqrt{r_1 r_2}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

$$\mathcal{R} = \sqrt{r_1 r_2}\Big[\underbrace{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}_{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\Big]$$

$$\mathcal{R}\Big|_{x=0} = 0$$

$$e^{i(\alpha-i\beta)} - e^{-i(\alpha+i\beta)}$$

$$\arcsin z = u = \alpha + i\beta$$

$$z = \sin u = x+iy = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i} = \cos\alpha\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2i} + \sin\alpha\,\frac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}$$

$$z \log z$$

$$(x+iy)(\log r + i\theta) = x\log r - y\theta + i\left[y\log r + x\theta\right]$$

$$\mathcal{R}(z\log z) = x\log\sqrt{x^2+y^2} - y\measuredangle$$

$$x = \sin\alpha\,\frac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2} = \sin\alpha\cosh\beta$$

$$y = \cos\alpha\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} = \cos\alpha\sinh\beta$$

$$\frac{3}{16},\ 12 \qquad \frac{\varphi}{4}$$

$$z e^{z} = (x+iy)\,e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^{x}\underbrace{[x\cos y - y\sin y]}_{x=0\ \ = -y\sin y} + i e^{x}(y\cos y + x\sin y)$$

$$-\frac{27}{2} - \frac{9}{2}$$

$$p_1 = \frac{27}{16}\left[\frac{1}{3x^4} - \frac{2x^2}{2^6} + \frac{x^4}{2^8}\right]$$

$$-\frac{27}{2} - \frac{9}{2}$$

$$8(8-10-1)$$

$$4(4-2-1) \qquad 6(6-6-1)$$

$$F = \lg z^2$$

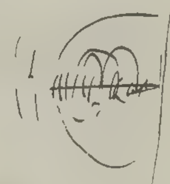
$$z^2 = e^F$$

$$z^2 = \frac{e^F + e^{-F}}{2} = \cosh F$$

$$= \frac{e^{R+iJ} + e^{-R-iJ}}{2}$$

$$= \frac{(\cos J + i \sin J)\, e^R + (\cos J - i \sin J)\, e^{-R}}{2}$$

$$= \cos J \, \frac{e^R + e^{-R}}{2} + i \sin J \, \frac{e^R - e^{-R}}{2}$$



$p = \frac{x}{r^3}$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}}_{= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)} = \Delta^2 u$

$U = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{k}{r} + \frac{mx}{r^3}$

$u = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{1}{2r}$

$U_i = \int \frac{4\pi r^2 \pi \, dr}{r} = 2r^2\pi$

$= 2\pi r$

$U_i = \int \frac{4\pi r^2 \pi \, dr}{r^2} = 4\pi r$

$U = 6\pi r$

$u = 6\pi \frac{x}{r}$ | $6\pi\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$

$\Delta^2 \frac{x^2}{r^3} =$

$\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{2x}{r^3} - \frac{3x^3}{r^5}$ | $-\frac{3x^2y}{r^5}$ | $-\frac{3x^2z}{r^5}$

$\frac{2}{r^3} - \cancel{\frac{6x^2}{r^5}} - \cancel{\frac{9x^2}{r^5}} + \cancel{\frac{15x^4}{r^7}} - \frac{3x^2}{r^5} + \cancel{\frac{15x^2y^2}{r^7}} - \frac{3x^2}{r^5} + \cancel{\frac{15x^2z^2}{r^7}}$

$= \frac{2}{r^3} - \frac{6x^2}{r^5}$

$\Delta^2 v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$

$v = \frac{xy}{2r^3}$

$w = \frac{xz}{2r^3}$

$\frac{y}{r^3} - \frac{3x^2y}{r^5}$ | $-3\frac{xyz}{r^5}$

$\Delta^2\left(\frac{xy}{r^3}\right) =$ $\cancel{-\frac{3xy}{r^5} - \frac{6xy}{r^5} + \frac{15x^3y}{r^7}}$

$-\frac{3xy}{r^5} - \frac{6xy}{r^5} + \frac{15x y^3}{r^7}$ $= -\frac{6xy}{r^5}$

$-3\frac{xy}{r^5}$ $+\frac{15xyz^2}{r^7}$

$\frac{3xy}{r^5}$

$4(4-5)$

-4

$H = \frac{xy}{r^4}$

$\nabla^2 \frac{xy}{r^4} = -4\frac{xy}{r^6}$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{r^3} - \frac{3x^3}{2r^5} + \frac{x}{2r^3} - \frac{3xy^2}{2r^5} + \frac{x}{2r^3} - \frac{3xz^2}{2r^5} - \frac{x}{2r^3}$

$= \frac{2x}{r^3} - \frac{3x}{2r^3} - \frac{x}{2r^3} = 0$

zatem mamy system równań:

$u = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{1}{2r}$

$v = \frac{xy}{2r^3}$

$w = \frac{xz}{2r^3}$

$u = \frac{x}{r^3} - \frac{x}{2r^3} - \frac{3x^3}{2r^5} = \frac{x}{2r^3} - \frac{3x^3}{2r^5}$

$v = \frac{y}{2r^3} - \frac{3x^2y}{2r^5}$

$w = \frac{z}{2r^3} - \frac{3x^2z}{2r^5}$

$\boxed{p = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}}$

$u = -\frac{3x^3}{2r^5}$ (stimmt!)

$v = -\frac{3x^2y}{2r^5}$

$w = -\frac{3x^2z}{2r^5}$

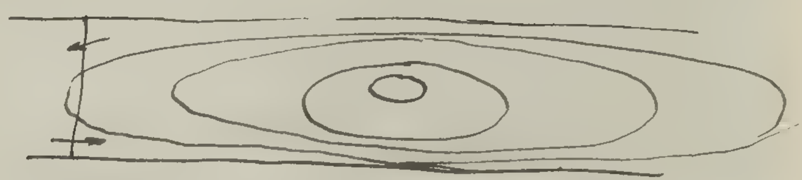
$= 0$ dla $x = 0$

$\frac{v}{u} = \frac{y}{x}$

protolinijny wypływ oraz ... równanie

$\nabla p = \mu \nabla^2 v$

$0 = \nabla^2 \operatorname{curl} v$ $\quad \nabla^2 \xi = \nabla$ [illegible]



aby ~~[illegible]~~ praca była skończona musi być przynajmniej być skończ.

q = przekrój kanału z kulą)

gdyby $\lim_{\infty} q$ = skończ.

ale właśnie $\lim_{\infty} \Phi$ skończ.

więc $\int \Phi \, dv$ [illegible]

więc $\lim_{\infty} q$ musi być nieskończone!

$\lim_{\infty} f(x) = 0$ $\quad$ ~~$f(x) = f(\frac{1}{y})$~~

$\lim_{\infty} f'(x) =$ ~~$\lim_{y=0} f'(\frac{1}{y}) \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$~~

$\nabla^2 p = 0$

Czy możliwe iżby v skończone ∞ w pewnym punkcie?

$\lim \int (v_n) r^2 d\omega$ = finite

$r^2 \int (v_n) d\omega$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u$$

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta^2 v$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\Delta^2 p = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \cdots\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cdots\right)$$

$$\Delta^2(\Delta^2 \psi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

$$= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \zeta$$

$f(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{c}}$

$u = \frac{(\alpha-\beta)}{c}\left(e^{\frac{\alpha}{c}} - e^{\frac{\beta}{c}}\right)$

$v = \frac{1}{i}\left[2\left(e^{\frac{\alpha}{c}} - e^{\frac{\beta}{c}}\right) + \frac{(\alpha-\beta)}{c}\left(e^{\frac{\alpha}{c}} + e^{\frac{\beta}{c}}\right)\right]$

$u = -\frac{4y}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c}$

$v = -4 e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c} + \frac{4x}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c}$

$e^{\frac{x}{c}\cos\theta + i\frac{x}{c}\sin\theta} = e^{\frac{x}{c}}\left[\cos\frac{y}{c} + i \sin\frac{y}{c}\right]$

$\zeta = \frac{8}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c}$

$p = \frac{8}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c}$

$u \cdots \frac{1}{\sqrt{r}}$

$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad f'(\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}^3}$

$u = i\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) - \frac{y}{}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}^3} + \frac{1}{\sqrt{\beta}^3}\right)\right] = +\frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{2y}{\sqrt{r}^3}\cos\frac{3\theta}{2}$

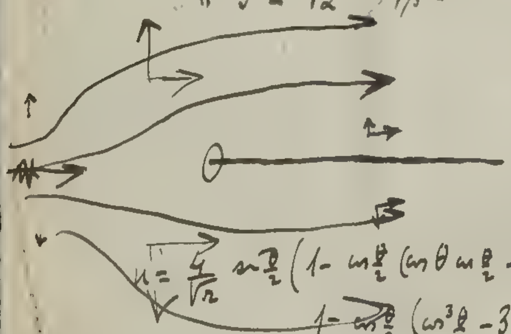
$= \frac{4}{\sqrt{r}}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$

$v = +iy\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}^3} - \frac{1}{\sqrt{\beta}^3}\right]$

$= \frac{2y}{\sqrt{r}^3}\sin\frac{3\theta}{2} = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$

$\zeta = -\frac{4}{2\sqrt{r}^3}\cos\frac{3\theta}{2}$

$p = \frac{4}{2\sqrt{r}^3}\sin\frac{3\theta}{2}$



$u = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$1 - \cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^3\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - 3 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$

$u = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[1 + \cos^2\frac{\theta}{2}\left(3 - 4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$v = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left[3\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left[4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right]$

Tutaj wiry nie powstają wskutek tarcia w punkcie O ruch. szybko się [illegible] (Doppelquelle)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$x^2 - y^2 = r^2 - 2y^2$

$$5r^4 + (k-2r^2)\,2r^2\cos 2\theta + 4kr^2 + k^2$$

$$= \cancel{r^4(5 - 4\cos 2\theta) + 2kr^2(2 + \cos 2\theta)}$$

$$5r^4 + (k-2r^2)\,2(r^2-2y^2) + 4kr^2 + k^2$$

$$= 5r^4 + 6kr^2 - 4ky^2 - 4r^4 + 8r^2y^2 + \cancel{k^2}$$

$$= r^4 + 8r^2y^2 + 6kr^2 - 4ky^2 + k^2$$

$4y$

$\cancel{2 + \cos 2\theta \pm i \sin 2\theta}$

$\cancel{(a+b-c)(a-b-c)}$

$$\boxed{4\{8y^2r^2 + k^2 - 2kr^2 + r^4 - 4ky^2 + \ldots\}}$$

$$[5 + 4\cos 2\theta] - k^2 + 2k r^2 [2 + \cos 2\theta] = 0$$

$$+5r^4 + 4r^2(r^2-2y^2) + k^2 + 4kr^2 + 2k(r^2-2y^2) = 0$$

$$r^4 + 8r^2y^2 + k^2 - 4kr^2 + 2kr^2 + 4ky^2$$

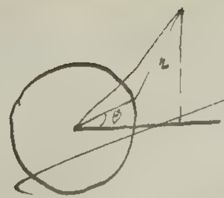
$$f(\alpha) = \frac{\log \alpha}{\alpha}$$

$$f'(\alpha) = -\frac{\log \alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$u = 2iy\left[\frac{1}{r^2}\sin 2\theta - \frac{\theta\cos 2\theta - \log r \sin\theta}{r^2}\right]$$

$v =$

$$\frac{\log r + i\theta}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin\theta)$$



$\xi = \int f(\theta) \frac{a\,d\theta}{r}$

$\frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$

$\left[\frac{y}{2r} - \frac{x^2 y}{2r^3} - \frac{y}{r^2}\right]$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \xi$

$\frac{x}{2r} - \frac{xy^2}{2r^3} - \frac{x}{r^2}$

$\lim_{r=\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3}$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \int_\sigma \xi \lg\frac{1}{r}\cos(\nu x)\,d\sigma + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial\xi}\lg\frac{1}{r}\,d\omega$

d.

$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \int_\sigma \xi \lg\frac{1}{r}\,ds + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial n}\lg\frac{1}{r}\,d\omega$

$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = +\frac{\cos\theta}{r}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{2\sin 2\theta}{r^2} = 4\frac{xy}{r^4}$

$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \int_\sigma \xi \lg\frac{1}{r}\,dn + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial s}\lg\frac{1}{r}\,d\omega$

$\sqrt{\alpha^2-1}$ $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$

~~ψ braucht aber nicht eindeutig zu sein!~~

$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$

$g'(\alpha) = \alpha f(\alpha) - f(\alpha)$

$\nabla^2\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0$

$\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = 0$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$

$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$

$g(\alpha) = \lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$

$\psi = \frac{1}{i}\Big[\underbrace{\alpha\sqrt{\beta^2-1} - \beta\sqrt{\alpha^2-1}}\Big] + J \lg(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})\Big]$

$r\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\Big(\underbrace{\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}_{=\frac{\nu-\mu}{2}}\Big) + \arcsin\left\{\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sqrt{r^2 + r_1 r_2 + 2r\sqrt{r_1 r_2}\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}\right\}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{1}{r}\sin^2\theta$

$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$

$\neq \frac{xy}{r^4}$

$\frac{\cancel{\ldots}}{\sqrt{2r}} = \theta$ die Änderung r

φ $\sqrt{1-r^2} = \sin\varphi$

$r = \cos\varphi$

$\theta_1 = \pi,\ \theta_2 = 0$

$\psi = r\sqrt{1-r^2}\begin{pmatrix}-1 & \theta=0\\ +1 & \theta=\pi\end{pmatrix} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{\cancel{\ldots}}\right)$

$= \arccos r$

$= \frac{xy}{r^2} + \theta = c = \frac{\sin 2\theta}{2} + \theta$

$\cancel{\theta + \frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\theta} \ldots$

$2\theta + \frac{\pi}{2}\sin 2\theta = 2c$

$\cancel{\frac{\pi}{2} = \frac{2c - 2\theta}{\sin 2\theta}}$

~~Spróbujmy według Lamba, Stokes~~.

$\cancel{\varphi = \sin pt\, f(x,y)}$

$\cancel{-p^2 f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}}$

$\cancel{-p^2 f\,\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \frac{\partial f}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{\partial f}{\partial\alpha}}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial\alpha}(-p^2 f^2) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial\beta}(-p^2 f^2) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2}$ $\Bigg\}$ $\cancel{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2}$

$\cancel{f = \alpha\,\varphi(\beta) + \beta\,\varphi(\alpha)^2}$

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial\alpha} = [\varphi(\beta) + \beta\varphi(\alpha)]^2}$

$\cancel{2\varphi(\beta)\varphi(\beta) + 2\varphi(\beta)\varphi(\alpha) + \beta\varphi(\beta)\varphi(\alpha) + 2\beta\varphi(\alpha)^2}$

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0$$

$\cancel{\varphi = e^{\alpha x + \beta t}}$

$\cancel{\nu\alpha^2 - \beta = 0}$ $\varphi = e^{\alpha x + \nu\alpha^2 t}$ $\cancel{= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\,\nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \quad\Big\|\quad \text{Sup. } \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$\varphi = \sum f_n(r)\, e$

$\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}$

$\cancel{\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}}$

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\nabla^2\varphi) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi = 0$$

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = c$$

$$\varphi = a\log r + b \quad = \left[\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right]\varphi$$

$$\cancel{b+c = -\frac{y^2+1}{\sqrt{y^2-1}} = -\sqrt{y^2-1}} \qquad \cancel{b-c = \sqrt{y^2-1}}$$

$$a+b-c=0$$

$$\cancel{a+b-c=0}$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\int \sqrt{\dots}\, d\alpha - \int \dots\, d\beta\right]$$

$$v = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right]$$

$$-u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}\right)$$

$$v = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{\alpha^2+1} - \sqrt{\beta^2+1}\right]$$

$$(A+iB)\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$r_1 r_2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)(A+iB)$$

$$\Delta^2\psi = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right] = \xi$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\dots}}\right.} = \eta$$

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

pr.

$$-u = \frac{1}{2}\left[\cancel{\sqrt{\alpha^2+1}} + \cancel{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+1}}\right] = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\Big[\overbrace{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}^{2\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\theta}\Big]$$

$$v = \frac{1}{2i}\left[2\sqrt{\beta^2+1} - 2\sqrt{\alpha^2+1} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+1}}\right] = -2\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} +$$

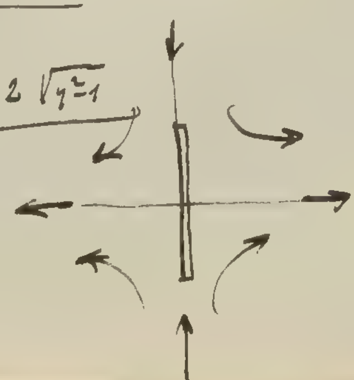
$$+\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\Big[\underbrace{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}_{-2\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\theta}\Big]$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$: $\quad u = v = 0$

$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \mp\frac{\pi}{2}$: $\quad u = 0$, $\quad v = \mp 2\sqrt{y^2-1}$

$\theta = 0$: $\quad -u = -\frac{2r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}$

$v = 0$



Na ścianie musi być albo $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=0$ albo $\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=0$

i miejsca gdzie te warunki spełnione można przyjąć za ściany

Przyjmujemy formę: $\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

$\Phi_1 = \underbrace{f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha)} = 0$ jest równaniem ściany

musi być albo funkcją rzeczywistą, albo urojoną

ale nie złożoną!

N. p. $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$ $\qquad \psi = \frac{\alpha^2\beta + \beta^2\alpha}{2} + \frac{\alpha^3+\beta^3}{6} = \frac{(\alpha+\beta)^3}{6} = x^3 \cdot \frac{4}{3}$

$g(\alpha) = \frac{\alpha^3}{6}$ $\qquad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 4x^2$

$\Phi_1 = \frac{\beta^2}{2} + \beta\alpha + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} = 2x^2$ $\qquad$ Ściana $x=0$

Przyjmujemy formę: $\psi = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + h(\alpha) + h(\beta)$

$\Phi_1 = f(\alpha) + f(\beta) + (\alpha+\beta) f'(\alpha) + h'(\alpha)$

1) albo potrzeba aby urojona część: $J\left[\alpha f'(\alpha) + h'(\alpha)\right] = 0$

to znaczy $\alpha f'(\alpha)$ musi być urojoną częścią jakiejś $f(x+iy)$

więc musi zadośćuczynić równaniu $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ czyli $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[(\alpha+\beta) f'(\alpha)\right] = f''(\alpha)$

Próba: $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ $\quad g(\alpha) = \sqrt{\alpha}$

$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$

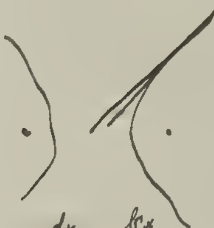
orthogonale Trajektorien des ψ

$$\underline{u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}} \qquad \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = 0$$

$$\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0}$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{ay}$$

$$\frac{d\alpha}{\frac{\partial\psi}{\partial\beta}} = \frac{d\beta}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}$$

$$u^2 + v^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \frac{\partial H}{\partial p}} \qquad \cancel{\frac{d}{dt}p = \frac{\partial H}{\partial p}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}$$

$$H = p\frac{\partial H}{\partial p} + \cdots$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - b\alpha\beta - c = 0$$

$$f(\alpha) = \alpha b$$

$$g(\alpha) = \alpha^2$$

$$\psi = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta b$$

$2b<1$

$$= x^2 - y^2 + 2b(x^2 + y^2)$$

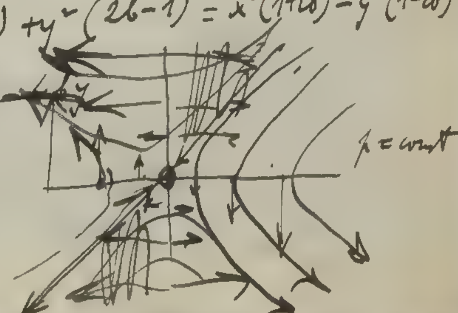
$$= x^2(1+2b) + y^2(2b-1) = x^2(1+2b) - y^2(1-2b)$$

$$\cancel{u = i\left[2b(\alpha - \beta) + (\alpha-\beta)2b\right] = i(\alpha-\beta)4b}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2x(1+2b)$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y(2b-1) = -2y(1-2b)$$

$$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{4x^2(1+4b^2+4b) + 4y^2(1+4b^2-4b)}$$



$x^2+y^2=a^2$

rovnanie

kruhu

$\alpha\beta=a^2$

$g'(\alpha)=-\alpha f'(\alpha)$

$f(\alpha)+f(-\alpha)+\alpha f'(\alpha)+g'(\alpha)=0$

$f(\alpha)+f(-\alpha)+2g'(\alpha)=0$

$\boxed{f(\alpha)+f(-\alpha)=2\alpha f'(\alpha)}$

$\alpha^2+\alpha^2=2\alpha.2\alpha$

$\alpha-\alpha=2\alpha.1$

$(\varphi+i\psi)(x+iy)^{\alpha}$

$Rf+xRf'-yIf'+Rg'=0$

$xIf'-yRf'+Ig'=0$

$f(\alpha)=F(\alpha)+i\Phi(\alpha)$

$=m(x,y)+in(x,y)+i\mu(x,y)-\nu(x,y)$

$f(-\alpha)=$

$f(\alpha)=\sqrt{\alpha-1}$

$f'(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$

$u=-\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{r_1}}\sin\frac{\theta_1}{2}$

$v=-\sqrt{r_1}\sin\frac{\theta_1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{r_1}}\cos\frac{\theta_1}{2}$

$\psi=f\alpha(p+i\zeta)^2\zeta$

nie! bo pri $\zeta=f(x+iy)$

a ψ nesplní $f(x+iy)$

$\zeta=\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}$

$\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\frac{\partial p}{\partial\beta}=-i\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)$

$\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}-\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)=-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}+\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)i$

p nie možno vypustiť ...

$\frac{\partial p}{\partial\alpha}=-i\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}$

$\frac{\partial p}{\partial\beta}=i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$

?

$p=-i\zeta+f(\beta)$

$i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}=-i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}+f'(\beta)$

$f'(\beta)=2i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$

$p=-i\zeta+2i\int\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}d\beta$

Dla koła c

$$b_0 + \frac{a_1}{c} = 0$$
$$a_0 + \frac{b_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} = 0$$
$$\frac{a_1}{c} + \frac{b_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^3} = 0$$
$$2\frac{a_2}{c^2} + \frac{b_3}{c^3} + \frac{a_4}{c^4} = 0$$
$$3\frac{a_3}{c^3} + \frac{b_4}{c^4} + \frac{a_5}{c^5} = 0$$

$$a_0 + \frac{b_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} = 0$$
$$\frac{a_1}{c} + \frac{b_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^3} = 0$$
$$2\frac{a_2}{c^2} + \frac{b_3}{c^3} - \frac{a_4}{c^4} = 0$$

$$a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$$
$$= b_3 = b_4 = \dots$$

$$a_1 + b_0 c = 0$$
$$a_0 c + b_1 = 0$$
$$a_1 c + b_2 = 0$$

$$R = -\frac{a_1}{c} + \frac{a_1}{r} + \cos\theta\left[a_0 - \frac{a_0 c}{r}\right] + \cos 2\theta\left[\frac{a_1}{r} - \frac{a_1 c}{r^2}\right]$$
$$S = -\sin\theta\left[a_0 - \frac{a_0 c}{r}\right] + \sin 2\theta\left[-\frac{a_1}{r} + \frac{a_1 c}{r^2}\right]$$

jeśli $\lim_{\infty}$ $R = V\cos\theta$, $S = -V\sin\theta$

$a_0 = V$

$a_1 = 0$

$$R = \cos\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right] a_0$$
$$S = -\sin\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right] a_0$$

~~$R = r^2\cos\theta$~~
~~$S = -3r^2\sin\theta$~~

Ogólnie:
$$R = \sum\left[a_n r^n (n-1)\cos(n-1)\theta - b_n r^n \cos(n\theta)\right]$$
$$S = \sum\left[-a_n r^n (n+1)\sin(n-1)\theta + b_n r^n \sin(n\theta)\right]$$

Jeśli $\lim_{\infty}\begin{cases}R\\S\end{cases}$ skończone: Dla ujemnych n:

$$R = \sum\left[-\frac{a_n}{r^n}(n+1)\cos(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n}\cos(n\theta)\right] = \sum_1^{\infty}\cos n\theta\left[\frac{b_n}{r^n} - n\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}}\right] + b_0$$
$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{a_n}{r^n}(n-1)\sin(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n}\sin(n\theta)\right] = \sum_1^{\infty} -\sin n\theta\left[\frac{b_n}{r^n} + (n-2)\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}}\right]$$

Dla koła $r = c$:

~~$b_0 = 0$~~	
~~$b_1 = a_0 c$~~	$b_1 = a_0 c$
$b_2 = 2a_1 c$	$b_2 = 0$
$b_3 = 3a_2 c$	$b_3 = -a_2 c$

$= 0$

$$R = -a_0\cos\theta + \frac{a_0 c}{r}\cos\theta = -a_0\cos\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right]$$
$$S = +a_0\sin\theta - \frac{a_0 c}{r}\sin\theta = a_0\sin\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right]$$
$$u = R\cos\theta - S\sin\theta = -a_0\left[1 - \frac{c}{r}\right]$$
$$v = R\sin\theta + S\cos\theta = 0$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right]a_1 + \frac{b_1}{i}(\lg\alpha - \lg\beta)$$
$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = a_1\left\{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right\} + b_1\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{r}\left\{a_1(\cos\theta - \cos 3\theta) + b_1\cos\theta\right\}$$
$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{a_1}{i}\left\{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right\} + \frac{b_1}{i}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{r}\left\{a_1(+\sin\theta - \sin 3\theta) - b_1\sin\theta\right\}$$
$$R = \frac{1}{r}\left\{a_1\left[\overset{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{1 - (\cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)}\right] + b_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right\} = \frac{1}{r}\left\{a_1\left(\overset{-\cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta}\right) + b_1\cos 2\theta\right\} = a_1 + \frac{b_1 - 2a_1}{r}\cos 2\theta$$
$$S = \frac{1}{r}\left\{a_1\left(\cos 3\theta\sin\theta - \sin 3\theta\cos\theta\right) - b_1 2\sin\theta\cos\theta\right)\} = \frac{1}{r}\left\{\cancel{a_1\sin 2\theta} - b_1\sin 2\theta\right\} = -\frac{a_1 + b_1}{r}\sin 2\theta$$
$2\sin\theta\cos\theta +$

Pod jakiemi warunkami

~~by~~ rozkład prędkości np. w otoczeniu krawędzi

będzie niezależnym od rodzaju ruchu w odległości

Albo pod jakiemi warunkami można znaleźć obszar dotykania mały koło krawędzi ~~tak~~ taki że

w ~~[illegible]~~ nim ruch odbywać się będzie w sposób $u = V_1 \dots$?

$v = V_2 \dots$

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\psi = 0$$

$$\nabla^2\left[\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\right] = 0 \qquad \nabla^2\varphi = 0$$

$$\left[\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right]\psi = \varphi(xyzt)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$$

jeśli się ψ_2 tak oznaczy że: → $\underline{\nu\nabla^2\psi_2 = \varphi(x,y,z,t)}$

to znaczy że: $(\nabla^2)\nabla^2\psi_2 = 0$

część funkcyi ψ_1 zawiera; tak już (w ogólnym razie) wszelkie ψ_3 zadość czyniące warunkowi $\nabla^2\psi_3 = 0$ więc dodanie $\psi_1 + \psi_3$ nie ma sensu tylko że tutaj ψ_2 także od czasu może zależeć!

Co prawda, że każdy ruch stateczny $\nabla^2\nabla^2\psi_2 = 0$ można sobie wyobrazić powstały jako graniczny przypadek drgania odpowiedniego (z czasem drgania i amplitudą nieskończoną), więc jako limes drgania koło równowagi, zatem jako limes rozwiązania według

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0 \quad [\text{bez } \psi_2$$

zatem można ogólnie otrzymać ψ przez superpozycyę $\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$ i innego lim ψ_1^*

N.p. kula drgająca w X i równocześnie postępowo się mogąca w X

[to mogłoby być spowodowane kula odbywająca podwójny ruch wahania w X z amplitudą a, T_1 b, T_2!

Czy to nie dowodzi że równanie 4 rzędu się sprowadzić da na równanie 2go rzędu?

~~Ruch potencyalny zmienny~~

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta^2 u}$$

$$\cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -p}$$

$\Delta^2\varphi = 0$ W granicznym przypadku gdzie $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ mamy φ potencyalne, ale powinni przylegani do ścian przeto $\varphi = 0$; z drugiej strony jednak robimy amplitudę ∞

$x+\xi = r\cos\varphi \quad = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}$ $\qquad d\xi = \frac{y}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \frac{y}{\sin\varphi}$

$$V = y^3 \int \frac{\sqrt{\frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} - x}\;\frac{y}{\cos^2\varphi}\,d\varphi\,\sin^4\varphi}{y^4}$$

$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$

$= 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2} = \frac{\operatorname{tg}^2}{1+\operatorname{tg}^2}$

$\frac{1}{z} = u \qquad -\frac{dz}{z^2} = du \qquad dz = -\frac{du}{u^2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

$\operatorname{tg}\varphi = z$

$$= \int \sqrt{\frac{y}{z} - x}\;dz\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 = \int \sqrt{yu - x}\;\frac{du}{u^2}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^2 \qquad \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{x}$$

~~Wenn~~ $f = \frac{1}{\alpha}$

$$\boxed{\psi = \frac{1}{i}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \sin 2\theta - 2\theta}$$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2(\cos 2\theta - 1)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}\cos 2\theta$

$\sin^2\theta\,\frac{\sin\theta}{r}$

$$\Psi = \int(\sin 2\theta - 2\theta)\sqrt{\xi}\,d\xi = 2\int \frac{y}{r^2} - \operatorname{arctg}$$

$\varphi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) \dots$

$u = \frac{1}{i}\left[f(\beta) - f(\alpha) + \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)\right] \quad \Big| + Rg \quad + Jh \qquad f^{*} = \frac{f(\alpha) - f'(\beta)}{i}$

$v = \quad f(\beta) + f(\alpha) + \beta f(\alpha) + \alpha f(\beta) \quad \Big| - Jg \quad + Rh$

$f = \sqrt{1-\alpha^2} = \sqrt{r_1 r_2}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$

$f' = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = -\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\right.$

$u = \sqrt{r_1 r_2}\left[-\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left[-\sqrt{r_1 r_2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\right]$

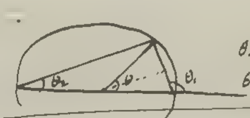
$v = \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \pm \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left[\sqrt{r_1 r_2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\right]$

Ściana: $r^2 = r_1 r_2$ niemożliwe oprócz $r = \infty$

punkty ± 1 : $u = v = \infty$

~~$r \sin\theta = \dots$~~

~~$r\cos\theta = \dots$~~



$\theta_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$\theta_2 = \frac{\theta}{2} \qquad \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$

$f = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$

$\beta f'(\alpha) = \frac{+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3}\left[\cos\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2} - i \sin\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}\right]$

$u = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3} \sin 3\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$v = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3} \cos\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}$

$f = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\left[\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2} + i \sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right]$

$f' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \cdot \frac{2}{(1-\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{r_1\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(\theta_1 + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - i \sin\left(\theta_1 + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$

Jeśli $f(\alpha)$ ma punkt ~~osobliwy~~ nieskończoności w skończoności, to także $f'(\alpha)$ musi tam mieć nieskończoność. (Duriège p. 130)

Zatem $\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$ muszą tam być ∞

Więc jeśli ∞ w skończoności (w obrębie ∞ do koła R) to możemy wypowiedzieć $f(\alpha)$ w tym obszarze dające się rozwinąć

$f(\alpha) = a + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \quad \frac{a_n}{\alpha^n}$

$+ b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots - b_n\alpha^n \quad \left[! \quad \text{np. } \frac{f(\alpha)=}{\sqrt{1-\alpha^2}} \; !\right]$

~~$\sqrt{1-\alpha^2} = \dots$~~

$\sqrt{\alpha^2-1} = \alpha\sqrt{1-\frac{1}{\alpha}} = \alpha\left[1 - \frac{1}{2\alpha} + \dots \qquad\right]$

Czy jeśli są punkty wyłączone  możemy rozwinąć funkcję poza koło

Np. arctg $\alpha =$

$R = (n-1)\, r^n \cos(n-1)\theta$.

$S = -(n+1)\, r^n \sin(n-1)\theta$:

$\frac{dS}{dr} + \frac{S}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial (Rr)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Sr) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{R}{r}\right)$

$\left[-(n+1)^2 \sin(n-1)\theta - (n-1)^2 \sin(n-1)\theta\right] r^{n-1} = \underset{-(n^2+1)}{\cancel{\quad}} \sin(n-1)\theta \cdot r^{n-1}$

$= -(1+n^2)\; \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{i}$

$- r^n \cos(n+1)\theta$

$+ r^n \sin(n+1)\theta$

$(n^2+1)\sin(n+1)\theta - (n+1)\, r^n \dots$

Dla ujemnych n:

$R = -\frac{(n+1)}{r^n}\cos(n+1)\theta$ $\quad\Big\|\quad -\frac{\cos(n+1)\theta}{r^n}$

$S = -\frac{(n-1)}{r^n}\sin(n+1)\theta$ $\quad\Big\|\quad -\frac{\sin(n+1)\theta}{r^n}$

Dla ściany X $(\theta = 0)$:

$-a_0 - b_0 = 0$

$-2a_1 - b_1 = 0$

$-3a_2 - b_2 = 0$

$-4a_3 - b_3 = 0$

wszystkie a dowolne

Dla ściany Y $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$-a_0 \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - b_0 \cos(-\frac{\pi}{2}) - \frac{2a_1}{r}\cos\pi - \frac{b_1}{r}$

$-\frac{3a_2}{r^2}\cancel{\cos\frac{3\pi}{2}} - \cancel{\frac{b_2}{r^2}\cos\frac{\pi}{2}}$

$-\frac{4a_3}{r^3}\cos\frac{4\pi}{2} - \frac{b_3}{r^3}\cos\frac{2\pi}{2}$

$= \frac{2a_1 - b_1}{r} - \frac{4a_3 - b_3}{r^3} + \frac{6a_5 - b_5}{r^5} \dots = 0$

spełnione z

Dla ściany $-X$ $(\theta = \pi)$:

$-a_0 \cos\pi - b_0\cos(-\pi) \quad = \quad a_0 + b_0 = 0$

$-2\frac{a_1}{r}\cos 2\pi - \frac{b_1}{r} \quad - \frac{2a_1 + b_1}{r} = 0$

$-3\frac{a_2}{r^2}\cos 3\pi - \frac{b_2}{r^2}\cos\pi \quad + \frac{3a_2 + b_2}{r^2} = 0$

$-4\frac{a_3}{r^3}\cos 4\pi - \frac{b_3}{r^3}\cos 2\pi \quad - \frac{4a_3 + b_3}{r^3} = 0$

to samo co poprzednio

w ogólności $b_n = -(n+1)a_n$

$R = \sum \frac{1}{r^n}\left[-a_n(n+1)\cos(n+1)\theta + a_n(n+1)\cos(n-1)\theta\right] = \sum \frac{a_n}{r^n}(n+1)\left[\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right] = \sum\frac{a_n(n+1)}{r^n}\, 2\sin n\theta \sin\theta$

$S = \sum \frac{1}{r^n}\left[-a_n(n-1)\sin(n+1)\theta + a_n(n+1)\sin(n-1)\theta\right] = \sum\frac{a_n}{r^n}\left[n\left[\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta\right] + \dots + \dots\right]$

$= \sum 2\frac{a_n}{r^n}\left[\sin n\theta\cos\theta - n\cos n\theta \sin\theta\right]$

$u = \sum\frac{2a_n}{r^n}\left[n(\sin n\theta \cos\theta \cos\theta \pm \cos n\theta \sin\theta \cos\theta)\right]$

$= \sum\frac{a_n}{r^n}\left[n\sin(n+2)\theta + \sin(n-2)\theta\right]$

$v = \sum\frac{2a_n}{r^n}\left[\sin n\theta + n\sin\theta\sin(n+1)\theta\right]$?

$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right]$ przy założeniu że $f(\alpha)$ funkcja algeb.

$f(\alpha) = \alpha^n$

$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^n - \beta\alpha^n\right] + \cdots \quad = \frac{\alpha\beta}{i}$

$-\frac{u}{k} = +\frac{\partial\psi}{\partial y} = \alpha^n + \beta^n - n(\beta\alpha^{n-1} + \alpha\beta^{n-1}) \quad \Big| + mk(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})$

$\frac{v}{k} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\left[\beta^n - \alpha^n + n(\alpha\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta)\right] \quad \Big| + mk\left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{i}\right)$

ważne dla każdego z wyjątkiem $n = 0$

$-u = r^n \cos n\theta - n r^n \cos(n-2)\theta \quad \Big| + r^n \cos n\theta$

$v = -r^n \sin n\theta + n r^n \sin(n-2)\theta \quad \Big| + r^n \sin n\theta$

$\sin n\theta \sin\theta - \cos n\theta \cos\theta = -\cos(n+1)\theta$

$u\cos\theta + v\sin\theta = -r^n(\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta) + nr^n(\cos(n-2)\theta\cos\theta + \sin(n-2)\theta\sin\theta) =$

$= r^n\left[\cos(n-1)\theta + n\cos(n-1)\theta\right] = r^n(n-1)\cos(n-1)\theta$

$v\cos\theta - u\sin\theta = r^n\left[(\cos n\theta\sin\theta - \sin n\theta\cos\theta) + n(\cos(n-2)\theta\sin\theta - \sin(n-2)\theta\cos\theta)\right] =$

$= r^n\left[-\sin(n-1)\theta - n\sin(n-1)\theta\right] = -r^n(n+1)\sin(n-1)\theta$

$+ r^n \cos n\theta$

$+ r^n \sin n\theta$

$\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta = \sin(n+1)\theta$

Ogólnie:

$R = \sum a_n r^n\left[\cos(n+1)\theta - n\cos(n-1)\theta\right] + \sum b_n r^n \cos n\theta$

$S = -\sum a_n r^n\left[\sin(n+1)\theta + n\sin(n-1)\theta\right] + \sum b_n r^n \sin n\theta$

$\frac{a_0}{}\cos\theta + b_0$

$+ \frac{a_1}{r} + \frac{a_1}{r}\cos 2\theta + \frac{b_1}{r}\cos\theta$

$+ \frac{a_2}{r^2}\cos\theta + 2\frac{a_2}{r^2}\cos 3\theta + \frac{b_2}{r^2}\cos 2\theta$

$\frac{a_3}{r^3}\cos 2\theta + 3\frac{a_3}{r^3}\cos 4\theta + \frac{b_3}{r^3}\cos 3\theta$

~~Dla ścianq $X = 0$~~ Jeśli $\lim_{r=\infty}\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right. = 0$:

$+ b_0 + a_0\cos\theta + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}\cos\theta + \frac{b_1}{r}\cos\theta$

$R = \sum_0^\infty\left\{\frac{a_n}{r^n}\left[\cos(n-1)\theta + n\cos(n+1)\theta\right] + \frac{b_n}{r^n}\cos n\theta\right\} = \sum_{n=+2}^{n=+\infty}\cos n\theta\left[\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{a_{n-1}(n-1)}{r^{n-1}} + \frac{b_n}{r^n}\right]$

$S = \sum_0^\infty\left\{\frac{a_n}{r^n}\left[\sin(n-1)\theta - n\sin(n+1)\theta\right] - \frac{b_n}{r^n}\sin n\theta\right\} = \sum\sin n\theta\left[\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{(n-1)a_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{b_n}{r^n}\right]$

$- a_0\sin\theta - \frac{b_1}{r}\sin\theta + \frac{a_2}{r^2}\sin\theta$

Dla ściany $Y = 0$:

$\sum\frac{a_n^{(1+n)} + b_n}{r^n} = 0 \qquad$ ~~$a_n = -b_n$~~ $\qquad b_n = -(1+n)a_n \qquad \boxed{\text{wszystkie } a_n \text{ dowolne, wszystkie } b_n \text{ dane}}$

$R = \sum_0^\infty\frac{a_n}{r^n}\left\{\cos(n-1)\theta + n\cos(n+1)\theta - \cos n\theta - n\cos n\theta\right\} = \sum_0^\infty\frac{2a_n}{r^n}\left\{\sin(n-\tfrac{1}{2})\theta\sin\tfrac{\theta}{2} + n\sin(n+\tfrac{1}{2})\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right\}$

$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$S =$

Dla ściany $X = 0$: $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$\frac{a_n}{r^n}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a_n}{r^n}\left[1 - n, \quad 0, \quad -1 + n, \quad 0 \quad \ldots\right]$

$= \frac{a_1}{r}(1-1) - \frac{a_3}{r^3}(1-3) + \frac{a_5}{r^5}(1-5) - \frac{a_7}{r^7}(1-7) + \cdots$

$= \frac{2a_3}{r^3} - \frac{4a_5}{r^5} + \frac{6a_7}{r^7} - \frac{8a_9}{r^9} + b_0 - \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_4}{r^4} = 0$

$a_3 = a_5 = \cdots = 0 \qquad a_1$ dowolny

$$R = \sum_1^\infty \cos n\theta \left[-\frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} - n\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} \right] - \frac{b_1}{r} - b_0 \cos\theta$$

$$S = \sum_1^\infty \sin n\theta \left[-\frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} (n-2)\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} \right] + b_0 \sin\theta$$

$b_0 = -a_0$

$b_1 = 0$ $\quad -b_0 - \frac{b_2}{r^2} - a_0 = 0 \quad\quad b_0 - \frac{b_2}{r^2} + a_0 = 0$

$-\frac{b_3}{r^3} - 2\frac{a_1}{r} = 0 \quad\quad -\frac{b_3}{r^3} = 0$

$-\frac{b_4}{r^4} - 3\frac{a_2}{r^2} = 0 \quad\quad -\frac{b_4}{r^4} - \frac{a_2}{r^2} = 0$

$\cancel{a_0 + \frac{b_2}{r^2} = 0} \quad\quad \cancel{b_2 = \ldots}$

$\cancel{R = -a_0 \cos\theta + a_0\frac{c^2}{r^2}\cos\theta} \quad = a_0 \cos\theta \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$\cancel{S = a_0 \sin\theta + a_0 \frac{c^2}{r^2}\sin\theta} \quad = a_0 \sin\theta \left[1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$\cancel{u = R\cos\theta - S\sin\theta = -a_0 + a_0\frac{c^2}{r^2}\cos 2\theta}$

$\cancel{v = R\sin\theta + S\cos\theta = a_0 \ldots}$

$u = a_0 \cos 2\theta \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$v = a_0 \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right] \sin 2\theta$

$\left[-1 + \frac{c^2}{\alpha\beta} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$

$\left[-1 + \frac{c^2}{\alpha\beta} \right] \frac{\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right]}{i}$

$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} 2\theta$

$\cancel{u = (x^2 - y^2)\left(\frac{c^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right)}$

$\cancel{v = 2xy \left(\frac{c^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right)}$

$\cancel{u = -\left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right] + c^2 \left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right]}$

$\cancel{v = -\frac{\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right]}{i} + c^2 \frac{\left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right]}{i}}$

$\cancel{\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{2c^2}{\alpha^3}} \quad\quad \cancel{i\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2c^2}{\alpha^3}}$

$\cancel{\frac{\partial u}{\partial \beta} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{2c^2}{\beta^3}} \quad\quad \cancel{i\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha} - \frac{2c^2}{\beta^3}}$

$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} - 2c^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \right)} \quad \cancel{\frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) - \left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} \right) + 2c^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \right)}$

$R = -a_0 \cos\theta + b_0 \cos\theta = 0$

$S = +a_0 \sin\theta - a_0 \sin\theta = 0$

53

$$V = 2y^3\int_{-\infty}^{0}\frac{z^2\,dz}{[\underbrace{y^2+(x+z^2)^2}_{U}]^2} = 2y^3\int_{-\infty}^{0}\frac{z^2\,dz}{(y^2+x^2+2xz^2+z^4)^2}$$

$$\lambda = 4(y^2+x^2) - 4x^2 = 4y^2$$

$$= \frac{2xz+2z^3}{8y^2U}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{2x}{8y^2}\int\frac{dx}{U} + \frac{1}{4y^2}\int\frac{x^2\,dx}{U}$$

$$k = \sqrt{2\sqrt{y^2+x^2}-2x}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{U} = \frac{1}{2\sqrt{a(2b+k^2)}}\,\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{(y^2+x^2)(2x+2\sqrt{y^2+x^2})}}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2\,dx}{U} = \frac{1}{2\sqrt{c(2b+k^2)}}\,\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{2x+2\sqrt{y^2+x^2}}}$$

$$V = \left[-\frac{xy}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{y}{4}\right]\frac{\pi}{\sqrt{2(x+\sqrt{y^2+x^2})}}$$

$$= \frac{\pi y}{4\sqrt{2}\sqrt{x+r}}\left[1-\frac{x}{r}\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{r}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\left[1-\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{r}}{4\sqrt{2}}\,\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}\;2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{r}\sin^3\frac{\theta}{2}$$

$u - H^2$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = f''(\alpha)+f''(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{i\,[f''(\alpha)-f''(\beta)]}{i}$$

$$-\frac{f''(\alpha)+f''(\beta)}{i}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\,(f''(\alpha)-f''(\beta))$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = if'$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = if' + i\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$V = y^3 \int_{-\infty}^{0} \frac{f(\xi)}{[y^2+(x+\xi)^2]^2} d\xi$$

$$U = y^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{f(\xi)(x+\xi)}{[y^2+(x+\xi)^2]^2} d\xi$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{[\quad]^2} \quad \frac{1 - 4(x+\xi)^2}{[\quad]}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{[\quad]^2} \left[3 \quad - \frac{4y^2}{[\quad]}\right]$$

$$p + i\varphi = f_1(x+iy)\sin\alpha t + f_2(x+iy)\cos 2\alpha t + \dots$$

$$p = \varphi_1(xy)\cos\alpha t + \varphi_2(xy)\cos 2\alpha t + \dots$$

$$\varphi = \chi_1(xy)\sin\alpha t + \chi_2(xy)\sin 2\alpha t + \dots \qquad = \nu\nabla^2\psi_2 \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = \cos\alpha t . \mathrm{pot}\,\chi_1 + \cos 2\alpha t . \mathrm{pot}\,\chi_2 + \dots$$

$$\psi_1 = \Psi_1 \cos\alpha t \cancel{+ \Psi_2 \cos 2\alpha t + \dots}$$

$$\cancel{\nu\nabla^2\Psi_1 = \Psi_1}$$

$$\nabla^2\Psi_1 \sin\alpha t = \Phi_2$$

$$-\Phi_1$$

$$\psi_1 = \Psi_1\cos\alpha t + \Psi_2\cos 2\alpha t + \dots$$
$$+\Phi_1\sin\alpha t + \Phi_2\sin 2\alpha t + \dots$$

$$\nu\nabla^2\Psi_1 = -\Phi_1 \qquad \nabla^2(\nabla^2\Phi_1) = -\Phi_1 \quad \text{etc.}$$

$$\nu\nabla^2\Phi_1 = \Psi_1 \qquad \text{etc.}$$

$$\psi = \cos\alpha t\left[\mathrm{pot}\,\chi_1 + \Psi_1\right] + \cos 2\alpha t\left[\mathrm{pot}\,\chi_2 + \Psi_2\right] + \dots$$
$$+\sin\alpha t\;\Phi_1 \qquad + \sin 2\alpha t\;\Phi_2 \qquad -$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\cancel{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = -\cancel{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}} + \nu \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$p + i\varphi = f_c(x+iy, t)$$

W rzeczywistości powinno być:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Delta \chi = 0$$

$$p = f_c(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \nabla^2 \psi\right)}_{=\Phi} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \nabla^2 \psi\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(\nu \Delta^2 \psi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \Delta \psi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \Phi = \nu \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \qquad \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$\Phi = f(\alpha) + f(\beta)$$

~~Stokes~~: Stokes, Lamb.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\nabla^2\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi_1 + \psi_2) = 0 \qquad (\nabla^2)\psi_1 = 0 \qquad \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_2 = 0$$

inaczej nie będzie się miało najogólniejszego rozwiązania [illegible] bo to dopiero $\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 \psi_2 = 0$

$X = v = x\chi - z\varphi$ $\qquad$ $p \quad q \quad r$ / $\varphi \quad \cancel{\psi} \quad \chi$

$L = \sum(\cancel{X}z - Zy)$

$= \sum vz\mu = \sum zx\chi - z^2\varphi$

$= r\sum zx - p\sum z^2$

$- r\sum yz + q\int z^2$

$z = x\sin x \qquad \frac{dz}{dx} = \sin x + x\cos x \qquad \lim_{x=0}\frac{dz}{dx}\ ?$

$\lim_{\infty}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} = 0 \qquad \frac{d}{dx} = \frac{z - -}{x^2}$

Cry ~~x~~ jedyn warunek jak musi znikać r_∞

jak wolno p pry iwaniu

$p_{xx}\ u\ dS \qquad \int u\,dp\ u\left(p + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ musi $= 0$ dla $\lim r = 0$ / $= \infty$

u warunku $r^n \qquad n = \frac{1}{2}$

$f = \sqrt{\alpha} \qquad f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

$-(-\sqrt{\alpha}$

$u = \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{r}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right] = \frac{\sqrt{r}}{2}\left[\cos 3\theta\cos\theta - \cos\theta\right] = \sqrt{r}\left[\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right]\cos\theta$

$v = \frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{i} = \sqrt{r}\left[\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right] = \sqrt{r}\left[\sin 2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]$

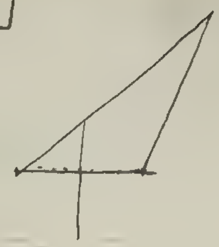
$u = \sqrt{r}\left[\frac{1}{2}\cos 3\theta - \frac{\cos\theta}{2}\right] = \sqrt{r}\sin\frac{2\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ $\qquad$ ~~$\sqrt{r_1}\cos 2\theta_1\cos\theta_1 - \sqrt{r_2}\cos 2\theta_2\cos\theta_2$~~

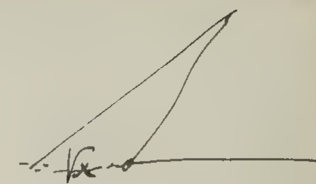
$v = \sqrt{r}\left[\frac{1}{2}\sin 3\theta + \frac{\sin\theta}{2}\right] = \sqrt{r}\sin\frac{2\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ $\qquad$ $\sqrt{r_1}\cos 2\theta_1\cos\theta_1 - \dots$

$$\boxed{v_0 = -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x_0^2}}$$

$$u = \frac{y^2 x}{2^{3/2}}$$

$$v = \frac{y^3}{2^4}$$





$$V = y^3 \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}\, d\xi$$

$$\int \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}\, d\xi = -\frac{1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi\right]$$

$$\cancel{\frac{1}{iy}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y+i(x-\xi)} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y-i(x-\xi)}\right)}$$

$$V = y^3 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi}}{[y^2+(x+\xi)^2]^2}\, d\xi = 2y^3 \int_{-\infty} \frac{z^2\, dz}{[y^2+(x+z^2)^2]^2}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\, d(\tfrac{x}{a})$$

$\sqrt{\xi} = z$

$\xi = z^2$

$d\xi = 2z\, dz$

$$= y^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{0} \frac{z^2\, dz}{y^2+(x+z^2)^2}$$

$$\cancel{y^2 + x^2 + 2xz^2 + z^4}$$

$$\int \frac{-1+\frac{ix}{y}}{y+i(x+z^2)} + \frac{1+\frac{ix}{y}}{y-i(x+z^2)}$$

$ix + iz^2 \quad + ix \quad + ix \quad \frac{x}{y}(x+z^2)$

$$= \frac{1}{y}\int \frac{iy - x}{iy - x - z^2} - \frac{iy+x}{iy + z^2}$$

$$= \frac{1}{y}\left[\frac{iy-x}{\sqrt{iy+x}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{iy+x}} - \frac{iy+x}{\sqrt{iy-x}} \lg \ldots\right.$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$$

$$u = -y \sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$v = -\sqrt{r r_1} \sin\frac{\theta_1+\theta}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} \cos\frac{\theta_1-\theta}{2}\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$p = \cos\frac{\theta_1-\theta}{2}\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \qquad \sqrt{1-\alpha^2} - \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\left\{\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right\}$$

$$r\sqrt{r_1 r_2} \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + y\sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$- \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r}\left\{\cos\left[\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta\right] + i \sin\left[\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta\right]\right\}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}$$
$$- \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - 2\theta\right) + i \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - 2\theta\right)\right\}$$

$$u = y\left\{-\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - 2\theta\right)\right\}$$

$$v = -\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta\right) + y\left\{\frac{-1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2} \cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - 2\theta\right)\right\}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = 0 \qquad u = v = 0$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\pi}{2} = \theta \qquad u = y\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{r_1}{r^2}\right) = -\frac{y(y^2-y^2-1)}{y^2\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}$$

$$v = 0$$

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{r\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}^{\,3}}$$

Przyjmujmy $f = \alpha^n \quad g(\alpha) = k\alpha^m$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^n - \beta\alpha^n + k(\alpha^m - \beta^m)\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{i}\left[\beta^n - n\beta\alpha^{n-1} + mk\alpha^{m-1}\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left[n\alpha\beta^{n-1} - \alpha^n - mk\beta^{m-1}\right]$$

$$-\alpha^n\beta^n - n^2\alpha^n\beta^n - m^2k^2\alpha^{m-1}\beta^{m-1} + n\alpha\beta^{2n-1} + nmk\alpha^{n-1}\beta^m - mk\alpha^{m+n-1}$$

$$+ n\alpha^{2n-1}\beta + mnk\alpha^m\beta^{n-1} - mk\beta^{m+n-1} = 0$$

$$-(\alpha\beta)^n(1+n^2) - m^2k^2(\alpha\beta)^{m-1} + n\alpha\beta(\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) + mnk(\alpha\beta)^m(\alpha^{n-m-1} + \beta^{n-m-1})$$

$$-mk(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1}) = 0$$

$$-(1+n^2)r^{2n} - m^2k^2r^{2m-2} + 2n\,r^{2n} \cos(2n-2)\theta + 2mnk\,r^{n+m-1}\cos(n-m-1)\theta$$

$$-2mk\,r^{m+n-1}\cos(m+n-1)\theta = 0$$

$$r^{2n}\left[(1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta\right] - m^2k^2r^{2m-2} + 2mk\,r^{m+n-1}\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = 0$$

$n=1 \quad k=\frac{1}{b} \quad m=2$

$$r^2[2+2] - \frac{4}{b^2}r^2 + \frac{4}{b}r^2\left[\cancel{\cos 2\theta}\right] = 0$$

$r=0$

$r=0$

$$\left[(1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta\right] - m^2k^2r^{2m-2n-2} + 2mk\,r^{m-n-1}\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = 0$$

$mk\,r^{m-n-1} = R \quad \| \quad R^2 - 2R\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = \left[1+n^2 + 2n\cos(2n-2)\theta\right]$

pod przyjęciem formy $\varphi = \frac{1}{2}(\; - \;)$

zamknięte do koła jeśli dla wszystkich małych θ:

$$[n \cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta]^2 + 2n \cos(2n-2)\theta > 1+n^2$$

czyli:

$$[\nu \cos(\nu-m)\theta + 2 \sin\nu\theta \sin m\theta]^2 \qquad > \nu^2 + 4(\nu+1)\sin^2\nu\theta$$

$$\cancel{[\nu\cos\nu\theta \cos m\theta + (\nu+2)\sin\nu\theta\sin m\theta]^2}$$

$$-\nu^2\sin^2(\nu-m)\theta + 4\sin^2\nu\theta\,(\sin^2 m\theta - \nu - 1) + 4\nu \sin\nu\theta \sin m\theta \cos(\nu-m)\theta > 0$$

$$\cancel{4\sin^2\nu\theta\,(}$$

$$4\nu\sin\nu\theta\sin m\theta\cos(\nu-m)\theta > \nu^2\sin^2(\nu-m)\theta + 4\sin^2\nu\theta\,(\nu+\cos^2 m\theta)$$

Np. dla bardzo małych θ:

$$4\nu^2 m \cancel{\theta^2} > \nu^2(\nu-m)^2\cancel{\theta^2} + 4\nu^2\cancel{\theta^2}(\nu+1)$$

$$4m > (\nu-m)^2 + 4(\nu+1)$$

$$4(m-\nu-1) > (\nu-m)^2$$

$$0 > (\nu-m)^2 - 4(\nu-m) + 4$$

$$0 > [\nu - m - 2]^2 \qquad \text{niemożliwe!}$$

z wyjątkiem $\nu=m+2$, $n=m+3$

$$[n\cos 2\theta - \cos(2n-4)\theta]^2$$

$$\cancel{n^2\cos^2 2\theta + \cos^2 n} \qquad [n\cos\varphi - \cos(n-2)\varphi]^2 + 2n\cos(n-1)\varphi - n^2 - 1 =$$

$$\cancel{n\cos\varphi - \cos(n-4)\varphi\cos\varphi + \sin}$$

$$n^2\cos^2\varphi + \cos^2(n-2)\varphi - 2n\cos\varphi\cos(n-2)\varphi + 2n\cos(n-1)\varphi - n^2 - 1 =$$

$$\cancel{-2n\cos\varphi\cos(n-2)\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi\cos\varphi} - 2n\sin(n-2)\varphi\sin\varphi - n^2\sin^2\varphi - \sin^2(n-2)\varphi$$

$$= -[n\sin\varphi + \sin(n-2)\varphi]^2$$

Rzędzie zamknięty do koła jeśli: ~~jeśli ale R może wypaść ...~~

$$\left[n\cos(n-m-1)\theta + \cos(m+n-1)\theta\right]^2 - (1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta > 0$$

$n=2$

$R = m k r^{m-3}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos(m-1)\theta + \cos(m+1)\theta\right] = 5+4\cos 2\theta$$

~~$m=3$~~ ~~$R^2 - 2R[2\cos\theta + \cos 2\theta]$~~

$m=1$ $\quad R^2 - 2R\left[2 + \cos 2\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$

$$R = 2+\cos 2\theta \pm \sqrt{-5+4\cos 2\theta + 4 + 4\cos 2\theta + \cos^2\theta}$$

$$= 2+\cos 2\theta \pm \sqrt{-1 + \ldots + \cos^2 2\theta}$$

$$R = 2+\cos 2\theta \pm i\sin 2\theta$$

$f = \alpha^2$

$g = \kappa\alpha$ $\qquad \psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + k(\alpha-\beta)\right] = \frac{\alpha-\beta}{i}\left[k - \alpha\beta\right]$

$$= 2y(k-x^2)$$

$u = -2(k-x^2) + 4y^2$

$v = \qquad -4yx$

$u^2+v^2 = 16y^2x^2 + 4(k-x^2)^2 - 16(k-x^2)y^2$

$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{i}\left[k - \alpha\beta - \beta(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{i}\left[k - 2\alpha\beta + \beta^2\right]$

$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left[-k+\alpha\beta - \alpha(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{i}\left[-k + 2\alpha\beta - \alpha^2\right]$

$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{i} = \frac{4yx}{i}$

$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = -2\left(k - 2\alpha\beta + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\right) = -2\left(k - 2r^2 + \frac{r^2\cos 2\theta}{i}\right)$

$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \left[\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 + k^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) + k(\alpha^2+\beta^2) - 4k\alpha\beta\right]$

$$= 5\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2+\beta^2)(k-2\alpha\beta) - 4k\alpha\beta + k^2$$

$$= x^4 + 8x^2y^2 + 2kx^2 - 4ky^2 + k^2$$

$$f = \sqrt[4]{\alpha^2-1} \qquad f' = \frac{\alpha}{2}(\alpha^2-1)^{-3/4}$$

$$u = -2\frac{y\,r}{(r_1 r_2)^{3/4}} \sin\left[\theta - 3/4(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$v = -4(r_1 r_2)^{1/4} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{4} + 2\frac{y\,r}{(r_1 r_2)^{3/4}} \cos\left[\theta - 3/4(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$f = (\alpha^2-1)^m \qquad f' = 2m\alpha(\alpha^2-1)^{m-1}$$

$$u = -\frac{2y\,r^m (r_1 r_2)^{m-1}}{\cancel{(r_1 r_2)}} \sin\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$v = -(r_1 r_2)^m \sin\left((\theta_1+\theta_2)m\right) + 2y\,m\,r(r_1 r_2)^{m-1} \cos\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$\cancel{u^2+v^2 = (r_1 r_2)^{2m} \sin^2(\theta_1+\theta_2) + 4y^2 m^2 r^2 (r_1 r_2)^{2m-2} - 4y\,m\,r(r_1 r_2)^{2m-1} \sin(\theta_1+\theta_2)m \cos\left[\theta+(m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

$$\cancel{\sin^2 m(\theta_1+\theta_2) + 4m^2y^2 - 4my}$$

$$\cancel{\sin^2 m(\theta_1+\theta_2) + 4m\frac{y^2 r^2}{(r_1 r_2)^2} = 4m\frac{y\,r}{r_1 r_2} \sin m(\theta_1+\theta_2) \cos\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right]$$

$$\xi = \frac{1}{i}\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] \qquad f''(\alpha) + f''(\beta) = \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -f''(\alpha) - f''(\beta)$$

$$p = f'(\alpha) + f'(\beta)$$

$$\alpha = \varphi(\overbrace{\xi + i\eta}^{\lambda}) \qquad p = \cancel{f'(\alpha)}\ f'\varphi(\lambda) + f'\varphi(\mu)$$

$$\beta = \varphi(\underbrace{\xi - i\eta}_{\mu}) \qquad \psi = \frac{1}{i}\left[\varphi(\lambda)\, f\varphi(\mu) - \varphi(\mu)\, f\varphi(\lambda) + g\,\varphi(\lambda) - g\,\varphi(\mu)\right]$$

Na ścianie $\xi = \xi_0$: $\psi = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$$

$$\cancel{\varphi(\xi_0)\, f\varphi}$$

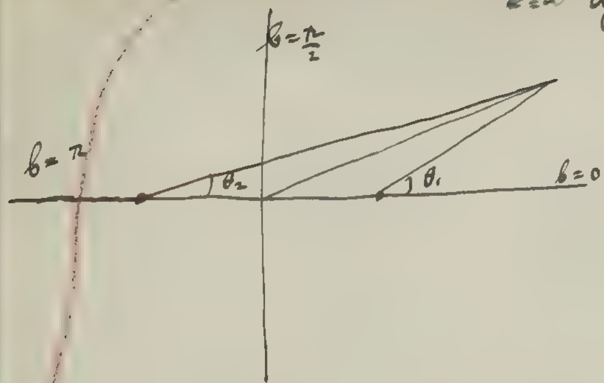
$$\varphi(\xi_0 + i\eta)\, f\varphi(\xi_0 - i\eta) + g\,\varphi(\xi_0 + i\eta) = \varphi(\xi_0 - i\eta)\, f\varphi(\xi_0 + i\eta)$$

φ'

$$\lg\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=a+ib$$

$$e^a\cos b = r\cos\theta+\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

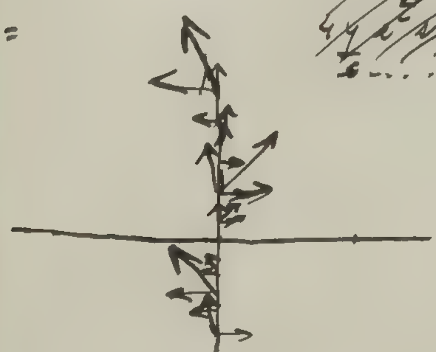
$$e^a\sin b = r\sin\theta+\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$



$$f(\alpha)=e^{\frac{\alpha}{c}}=e^{\frac{x}{c}}\left[\cos\frac{y}{c}+i\sin\frac{y}{c}\right]$$

$$u=-4e^{\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}-\cancel{4\frac{y}{c}e^{\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}}$$

$$v=\qquad \cancel{4\frac{y}{c}e^{\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}}$$



$$f'(\alpha)=\frac{1}{c}e^{\frac{\alpha}{c}}$$

$$\psi=\alpha e^{\frac{\beta}{c}}\ldots$$

$$p=8e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$$

$$q=8e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$$

$$u=4e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}+4\frac{y}{c}e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$$

$$v=\qquad 4\frac{y}{c}e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}$$

$$u=4e^{-\frac{x}{c}}\left(\sin\frac{y}{c}+\frac{y}{c}\cos\frac{y}{c}\right)$$

$$v=4e^{-\frac{x}{c}}\quad.\qquad\frac{y}{c}\sin\frac{y}{c})$$

$$f(\beta)+f(\alpha)+g'(\alpha)+g'(\beta)+\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)$$

$$g'(\alpha)=-\alpha f(\alpha)-f(\alpha)$$

$$=-\left(\frac{\alpha}{c}+1\right)e^{\frac{\alpha}{c}}$$

$$\cancel{g(\alpha)=-(\alpha+c)e^{\frac{\alpha}{c}}}$$

$$g(\alpha)=-\int e^{\frac{x}{c}}\left(\frac{x}{c}+1\right)dx=-e^{\frac{x}{c}}(x+c)+\underbrace{\int e^{\frac{x}{c}}dx}_{c\,e^{\frac{x}{c}}}$$

$$=-e^{\frac{x}{c}}.x$$

$$\psi=\alpha e^{\frac{\beta}{c}}+\beta e^{\frac{\alpha}{c}}-\alpha e^{\frac{\alpha}{c}}-\beta e^{\frac{\beta}{c}}$$

$$=(\alpha-\beta)\left(e^{\frac{\beta}{c}}-e^{\frac{\alpha}{c}}\right)=-4y\,e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}$$

$\underline{n=0}$ $\quad R = mk\,r^{m-1}$

$$R^2 + 2R\cos(m-1)\theta = -1$$

$$R = \cos(m-1)\theta \pm \sqrt{\cos^2(m-1)\theta - 1} \cdot \text{Compl.}$$

$\underline{n=1}$ $\quad R = mk\,r^{m-2}$

$$R^2 - \cancel{2R[\cos m\theta - \cos m\theta]} = -2 + 2 = 0$$

$$R = 0$$

$\underline{n=2}$ $\quad R = mk\,r^{m-3}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos(1-m)\theta - \cos(m+1)\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$$

$$R = 2\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta \pm \sqrt{\left[2\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta\right]^2 - 5 + 4\cos 2\theta}$$

$$= 2(\cos m\theta\cos\theta + \sin m\theta \sin\theta)$$

$$- \cos m\theta\cos\theta + \sin m\theta\sin\theta$$

$$R = \cos m\theta\cos\theta + 3\sin m\theta\sin\theta \pm \sqrt{(\qquad)^2 - 5 + 4\cos 2\theta}$$

$m=0$ $\quad R = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 5 + 4\cos 2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\underbrace{5\cos^2\theta - 5}_{-5\sin^2\theta} - 4\sin^2\theta}$ $\quad$ Compl.

$m=1$ $\quad R = \cancel{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta \pm \sqrt{\cos^4\theta + 6\sin^2\theta\cos^2\theta + 9\sin^4\theta - 5 + 4\cos^2 - 4\sin^2}}$

$$= 1 + 2\sin^2\theta \pm \sqrt{1 + \cancel{4\sin^2} + 4\sin^4 - 5 + 4\cos^2 - \cancel{4\sin^2}}$$

$$\sqrt{4(\sin^4 + \cos^2 - 1)} = 2\sqrt{\sin^2(\sin^2 - 1)}$$ $\quad$ Compl.

$m=2$ $\quad$ ./.

$m=3$ $\quad R^2 - 2R\left[2\cos 2\theta - \cos 4\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$

$$R = 2\cos 2\theta - \cos 4\theta \pm \sqrt{\underbrace{(2\cos 2\theta - \cos 4\theta)^2}_{\geq 0} - 5 + 4\cos 2\theta}$$

rzeczywiste np. dla $\theta = 0$

$$R^2 - 2R\left[\nu\cos(\nu-m)\theta + \overset{n-1}{\cos(\nu-m)\theta - \cos(\nu+m)\theta}\right] = -(1+n^2) + 2n\cos 2\nu\theta$$

$$= -n^2 - 1 + 2n - 2n(1-\cos 2\nu\theta)$$

$$R^2 - 2R\left[\nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] \qquad = \cancel{\ldots} - 4n\sin^2\nu\theta$$

$$= -\nu^2$$

$$\cancel{R^2 - 2R\left[1 + 2\sin^2\theta\right] = -1 - 8\sin^2\theta}$$

$$\cancel{\sqrt{1 + \ldots + 4\sin^4 - 1 - 8\sin^2} = \ldots}\;\sin - 3$$

$$\cancel{R = \nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu}$$

$$\cancel{R^2 - 2R\left[\nu(\cos\nu\theta\cos m\theta + \sin\nu\theta\cos m\theta) + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] = \ldots}$$

$$\cancel{(n-1)\cos\nu\theta\cos m\theta + (n+1)\sin\nu\theta\sin m\theta}$$

$$\cancel{= n\cos(\nu-m)\theta - \cos(\nu+m)\theta}$$

Np. $n=2$

$m=2$

$$R^2 - 2R\left[\cos\theta + \underbrace{2\sin\theta\sin 2\theta}_{4\sin^2\theta\cos\theta}\right] = -1 - 8\sin^2\theta$$

$$R = \cos\theta\,(1+4\sin^2\theta) \pm \sqrt{\begin{array}{l}-1-8\sin^2\theta\\ +\cos^2\theta\,(1+8\sin^2\theta)\\ +16\cos^2\sin^4\theta\end{array}}$$

$$\frac{2k}{r} = R = \cos\theta(1+4\sin^2\theta) \pm \sqrt{16\cos^2\sin^4 - \sin^2\theta\,(1+8\sin^2)}$$

$$\pm\sin\sqrt{16\cos^2\sin^2 - 8\sin^2 - 1}$$

$$4k^2 - 4kr(\cos\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta) + (1+8\sin^2\theta)r^2 = 0$$

$\theta = 0$: $4k^2 - 4kr + r^2 = 0$

$(2k-r)^2 = 0$

$r = 2k$

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $4k^2 - 9r^2 = 0$ $\quad r = \frac{2}{3}k$

$$4k^2(x^2+y^2) - 4kx(x^2+y^2+4y^2) + (x^2+y^2+8y^2)(x^2+y^2) = 0$$

Krzywa 4 stopnia

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad 4k^2 - 4kr\frac{3\sqrt{2}}{2} + 5r^2 = 0$

$$r^2 - \frac{6\sqrt{2}}{5}kr + \frac{4}{5}k^2 = 0 \qquad r = \frac{3\sqrt{2}}{5}k \pm \sqrt{\frac{18}{25}k^2 - \frac{4k^2}{5}}\ \text{imag.}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad r =$ complex

$f = \alpha^{2/3}$ $\qquad f' = \frac{2}{3}\alpha^{-1/3}$

$u = \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) - (\alpha^{2/3} + \beta^{2/3}) = \frac{2}{3} r^{2/3}\cos\frac{4\theta}{3} - r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3} + r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3}$

$v = \frac{1}{i}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} - \quad\right) - (\alpha^{2/3} - \beta^{2/3})\right] = \frac{2}{3} r^{2/3}\sin\frac{4\theta}{3} - r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3} - r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3}$

$f = \quad (\alpha - \beta)$

$\frac{2\theta}{3} = 2\pi \qquad \frac{4\theta}{3} = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 3\pi \qquad \frac{3\pi}{2}$

$f = \alpha^{3/4}$? $\qquad f'(\alpha) = \frac{3}{4}\alpha^{-1/4}$

$u = \frac{3}{4} r^{3/4}\cos\frac{5\theta}{4} - r^{3/4}\cos\frac{3\theta}{4}$ $\qquad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$v = \frac{3}{4} r^{3/4}\sin\frac{5\theta}{4} - r^{3/4}\sin\frac{3\theta}{4}$ $\qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$\int\left[(p_{xx}\, l + p_{xy}\, m) u + (p_{xy}\, l + p_{yy}\, m) v\right] dS$

$= \int p\,(lu + mv) + \left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] ul + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)[um + vl] + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\cdot vm$

$\mu l\left[2\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$

$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad p_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 p_{zz}}{\partial z^2} +$

$p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad p_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$

$p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

$\cancel{\frac{\partial p_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} = 2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)}$

$\cancel{\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}$

$\cancel{= \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} + p) = -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}}$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\nabla^2 u$

$p = \int \nabla^2 u\, dx$

Dla kuli :

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$p = -\frac{3}{2} \mu U a \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{9}{2} U a \frac{xyz}{r^5}$$

$$w = -\frac{3}{4} \frac{U a}{r^3} xz \cancel{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}$$

$$v = -\frac{3}{4} \frac{U a}{r^3} xy$$

Żeby mógł istnieć ruch z prędkością $\lim_{\infty} \frac{u}{v} =$ skończone } musi być $\lim_{\infty} \frac{p_{xx}}{p_{xy}} \geqq \frac{1}{r^2}$

$\lim_{\infty} \frac{v}{u} = 0$

~~w przestrzeni~~

$> \frac{1}{r}$

w płaszczyźnie .. –

jeśli skończony ruch :

$$\lim_{\infty} (p = f'(\alpha) + f'(\beta)) \quad > \frac{1}{r}$$

(czy także dla nieok. obszaru?)

$$\lim_{\infty} (\zeta = f(\alpha) - f(\beta)) \quad = 0 \qquad \iint \Phi \, dx dy = \iint \zeta^2 dx dy$$

zatem w ogólności $\lim_{\infty} \zeta \leqq \frac{1}{\sqrt{r}}$

$f(\alpha)$ nie może mieć punktów (z reguły) istotnych osobliwych w ∞, ponieważ $p + i\zeta <$ const

(wszakże $\lim \zeta = \infty$)

zatem w każdym razie f istnieje obszar $\geqq R$ – gdzie $f(\alpha) = a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \dots$

Jeżeli w ogóle tylko nieistotne punkty osobl. to

$$0 < f'(\alpha) < \frac{a}{\sqrt{r}}$$

$$r < f(\alpha) < \sqrt{r}$$

$$\psi = \sin\theta \cdot f_1(r) + f_2(r)\sin 2\theta + f_3(r)\sin 3\theta + \dots \quad f_n(r)\sin n\theta + \dots$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\Delta^2\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta \cdot \left[\frac{\partial^2 f_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}f_n\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\right]^2 f_n = 0$$

pro $n=1$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(fr)}{\partial r}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}fr = c$$

$$\frac{\partial}{\partial r}fr = cr$$

$$fr = c\frac{r^2}{2} + a$$

$$f = c\frac{r}{2} + \frac{a}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(fr)\right]$$

$$\frac{cr^2}{2} + \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f(r)$$

$$\cancel{\frac{cr^2}{2} + ar + b} = fr$$

$$\frac{cr^3}{2} + ar\lg r = \frac{\partial}{\partial r}(fr)$$

$$\frac{cr^4}{8} + b + \frac{a}{2}r^2\lg r + dr^2 = f(r)$$

$$f = cr^3 + \frac{b}{r} + d\cdot r + a\,r\lg r$$

$$f(r) = \frac{a}{r} + br + cr\lg r + dr^3$$

$$\frac{df}{dr} = -\frac{a}{r^2} + b + c + c\lg r + 3dr^2$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{2a}{r^3} + \frac{c}{r} + 6dr$$

$$-\frac{2a}{r^3} + \cancel{\frac{2\lg r}{r}} + \cancel{\frac{b+c}{r}} + 2dr$$

$$-\frac{2c}{r^3} + \cancel{8}\ \frac{4d}{r}$$

$$+\frac{1}{r}\left(-\frac{2c}{r^2} + 8d\right)$$

$$\frac{4c}{r^3}$$

$$\cancel{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\right]f = F}$$

$$\cancel{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{n^2}{r}\right]f = rF}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)}$$

$$f = e^{\int^r z\,dr}$$

$$f' = zf$$

$$f'' = \left(\frac{dz}{dr} + z^2\right)f$$

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + \frac{z}{r} - \frac{n^2}{r^2} = 0$$

$$\underbrace{z = \frac{n}{r}}_{\text{partik. } \int} \quad \cancel{-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^2} = 0}$$

$$z = \frac{n}{r} + y$$

$$f = e^{\int^r\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{\frac{r}{2n} + cr^{2n+1}}\right)dr}$$

$$\frac{dy}{dr} + \frac{2ny}{r} + y^2 + \frac{y}{r} = 0$$

$$\frac{dy}{dr} + y^2 + \frac{(2n+1)y}{r} = 0$$

$$y^{-1} = -1\,e^{\int^r\frac{2n+1}{r}dr}\left[C - \int^r e^{-\int^r\frac{2n+1}{r}dr}dr\right]$$

$$\frac{1}{y} = -e^{(2n+1)\lg r}\left[\dots\right] = -r^{2n+1}\left[C - \int^r\frac{dr}{r^{2n+1}}\right]$$

$$= \cancel{r^{2n+1}\frac{-1}{(2n)r^{2n}}} - r^{1+2n}\left[C + \frac{1}{2nr^{2n}}\right] = -r\left(1 + 2nc\,r^{2n}\right)$$

$$y = -\frac{1}{\frac{r}{2n} + c\,r^{2n+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{2n} + (2n+1)c\,r^{2n}}{\left(\frac{r}{2n} + c\,r^{2n+1}\right)^2} - \frac{(2n+1)}{\frac{r^2}{2n} + c\,r^{2n+2}} =$$

$$= \frac{4}{r^2}\,\frac{\cancel{\frac{1}{2n} + 2n(2n+1)c\,r^{2n}} - \frac{2n+1}{2n} - 2n(2n+1)c\,r^{2n}}{\left(1 + 2nc\,r^{2n}\right)^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 f = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)\varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi_1 = a r^n + \frac{b}{r^n}}$$

$$n(n-1) + n - n^2 = 0$$

$$n(n+1) - n - n^2 = 0$$

$$\Delta^2 \Delta^2 \psi = 0$$

$$\Delta^2 \psi = f(x+iy) + f(x-iy)$$

$$\Delta^2\psi = \tfrac{1}{2i}\left[f(r e^{i\theta}) - f(r e^{-i\theta})\right]$$

$$= f(r\cos\theta + i r\sin\theta)$$

$$+ f(r\cos\theta - i r \sin\theta)$$

$$= a_0 + a_1 r e^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + a_3 r^3 e^{3i\theta} + \dots$$

$$+ b_0 + b_1 r e^{-i\theta} + a_2 r^2 e^{-2i\theta} + \dots$$

$$= a_0 + a_1 r \sin\theta + a_2 r^2 \sin 2\theta + \dots$$

$$+ b_1 \frac{\sin\theta}{r} + b_2 \frac{\sin 2\theta}{r^2} + \dots$$

$$+ b_0 \log r$$

Stokesa metoda: nie nadowodzi że ψ jest najogólniejsze możliwe. Sprzeczność tkwi że $\Delta^2\psi = \zeta$ da się rozwinąć w szereg $\psi = $ ...

To dobre w zasięgu koła ale nie da się uogólnić na jakiekolwiek krzywe

Czy takie rozwiązanie obejmuje także punkty gdzie $\psi = \infty$?

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\psi = \sum a_n r^n \sin n\theta + \sum b_n \frac{\sin n\theta}{r^n}$$

$$\psi = \sum A_n \sin n\theta$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)A_n = a_n r^n + \frac{b_n}{r^n}$$

$$A_n = r^{n+2} \ (?)$$

$$(n+2)(n+1) + (n+2) - n^2 = a_n = 4(n+1)$$

$$A_n = \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$(n-2)(n-1) - (n-2) - n^2 = b_n = 4(-n+1)$$

$$\boxed{A_n = \frac{a_n}{4(n+1)} r^{n+2} + \frac{b_n}{4(1-n)} \frac{1}{r^{n-2}} + C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}}$$

z wyjątkiem $A_1 =$
$A_2 =$

Zy!

$$\psi = \sum A_n \sin n\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum \frac{\partial A_n}{\partial r}\sin n\theta = \sum\left[\frac{n+2}{4(n+1)} a_n r^{n+1} + n C_n r^{n-1} + \frac{n-2}{4(n-1)} b_n \frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n D_n}{r^{n+1}}\right]\sin n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sum\left[\frac{a_n}{4(n+1)} r^{n+1} + C_n r^{n-1} + \frac{b_n}{4(1-n)}\frac{1}{r^{n-1}} + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right] n\cos n\theta$$

$n=2$: $A_2 = \frac{a_2}{12} \cdot r^4 - \frac{b_n}{4} + C_n r^2 + \frac{D_n}{r^2}$

$$(\ )A_2 = a_2 r^2 + 2C_n + \frac{6D_n}{r^4}$$

$$-\frac{a_2}{3} r^2 - 2C_n - \frac{2D_n}{r^4}$$

$$-\frac{a_2}{3} - 4C_n - \frac{4D_n}{r^4} + \frac{b_n}{r^2}$$

$$= \frac{a_2 r^2}{3} - 4C_n + b_n + 4\frac{D_n}{r^4}$$

$$2\frac{a_2}{3} \qquad + 16\frac{D_n}{r^6}$$

$$+\frac{2a_2}{3} \qquad -16\frac{D_n}{r^6}$$

$$-4\frac{a_2}{3} + \dots \qquad -16$$

$n=0$: $\varphi_0 = a_0 \lg r + b_0 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) A_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right)$

$$\int [a_0 r \lg r + b_0 r] dr = r\frac{dA}{dr} = a_0 \frac{r^2}{2}\lg r - a_0\frac{r^2}{2} + b_0\frac{r^2}{2}$$

$$\frac{dA}{dr} = a_0 r \lg r - b_0 r$$

$$A = a_0 r^2 \lg r - b_0 r^2$$

$a_0 r + 2a_0 r \lg r - 2b_0 r$

$a_0 + 2a_0 \lg r + 2a_0 - 2b_0$

$a_0 + 2a_0 \qquad -2b_0$

$$A_0 = a_0 r^2 \lg r + b_0 \lg r + c_0 + d_0 r^2$$

$n=1$: $\varphi_1 = a_1 r + \frac{b_1}{r} = \dots$

$$\cancel{A_1 = \frac{a_0}{dr} + b_0 r + c_0 r \lg r + d_0 r^3}$$

$$A_1 = a_0 r \lg r + b_0 r + \frac{c_0}{r} + d_0 r^3$$

$n=2$: $\varphi_2 = a_2 r^2 + \frac{b}{r^2} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) A_n$

$A_n = \frac{b}{4} + \dots + \frac{r^4 a_2}{4.3}$

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dx}{dr} - \frac{4x}{r^2} - \frac{b}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dx}{dr}\right) = \frac{(4x+b)}{r^2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dx}{dr}\right) = \frac{4x}{r}$$

$z = r^2$

$z = \frac{1}{r^2}$

$A_2 = -\frac{b}{4} + mr - \frac{n}{r} + a_2 r^2 + \frac{b}{r^2} + \dots$

$-\frac{2n}{r^3} + 2a_2 + \frac{6b}{r^4}$

$+\frac{m}{r} + \frac{n}{r^3} + 2a_2 - \frac{2b}{r^4}$

$+b - \frac{4m}{r} + \frac{4n}{r^3} - 4a_2 - \frac{4b}{r^4}$

$b - 3\frac{m}{r} + \frac{3n}{r^3}$

$-\frac{6m}{r^3} + 36\frac{m}{r^5}$

$+3\frac{n}{r^4} - 9\frac{n}{r^5}$

$+12 \quad -12$

$$A_2 = a_0 r^4 + b_0 r^2 + c_0 + \frac{d_0}{r^2}$$

$$\boxed{\psi = (a_0 r^2 \lg r + b_0 \lg r + c_0 + d_0 r^2) + \left(a_1 r \lg r + b_1 r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3\right)\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n r^{n+2} + b_n r^n + \frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n}\right]\sin n\theta}$$

współczynniki przypadku takim dowolne?

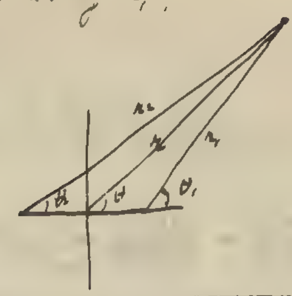
$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2a_0 r \lg r + (a_0 + 2d_0) r + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 \lg r + a_1 + b_1 - \frac{c_1}{r^2} + 3d_1 r^2\right)\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n+2)r^{n+1} + b_n n r^{n-1} - \frac{(n-2)c_n}{r^{n-3}} - \frac{n\, d_n}{r^{n+1}}\right]\sin n\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left(a_1 r \lg r + b_1 r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n r^{n+2} + b_n r^n + \frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n}\right] n \cos n\theta$$

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

rozwiązać wedł. r, θ

$$v = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$



$$r_1^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\theta$$

$$r_2^2 = 1 + r^2 + 2r\cos\theta$$

$$(r_1 r_2)^2 = \cancel{(1+r^2)^2 + \dots - 4r(1+r^2)}$$

$$= (1+r^2)^2 - 4r^2\cos^2\theta$$

$$= 1 + 2r^2(1 - 2\cos^2\theta) + r^4$$

$$= 1 - 2r^2\cos 2\theta + r^4$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sqrt{1-\cos(\theta_1+\theta_2)} = \sqrt{1 - \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}$$

$$r^2 = r_1^2 + 1 + 2r_1\cos\theta_1 = 2 + r^2 - 2r\cos\theta + 2r_1\cos\theta_1$$

$$r_1\cos\theta_1 = r\cos\theta - 1$$

$$u = -\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\theta\sqrt{\frac{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}} - \cos\theta\sqrt{\frac{1-\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}}\right]$$

$$R = v_r = u\cos\theta + v\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$S = v_\perp = -u\sin\theta + v\cos\theta = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$R = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2 . 2}}\sqrt{1-\cos(\theta_1+\theta_2)} = \frac{\sin\theta}{r_1 r_2\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - [\underbrace{(x+1)(x-1) - y^2}_{x^2-y^2-1}]}$$

$$= \frac{\sin\theta}{r_1 r_2\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - r^2\cos 2\theta + 1} = \sin\theta\,\frac{\left[1 - r^2\cos 2\theta + \sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\right]^{1/2}}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}}$$

$$= \sin\theta\left[1 - r^2 + 2r^2\sin^2\theta + \sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

$$= \sin\theta\sqrt{\frac{1-r^2\cos 2\theta}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}}_{\alpha}}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{1 + \frac{1-r^2\cos 2\theta}{\alpha}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha}}\left[1 + \frac{1-r^2\cos 2\theta}{2\alpha} - \frac{1}{8}\left(\frac{1-r^2\cos 2\theta}{\alpha}\right)^2 \dots\right]$$

$$(1-r^2\cos 2\theta)(1 - 2r^2\cos 2\theta + r^4)^{-\frac{1}{2}} = (1-r^2\cos 2\theta)\frac{1}{\sqrt{(1+r^4) + 2r^2 - 2r^2(1+\cos 2\theta)}}$$

$$= \frac{1-r^2\cos 2\theta}{(1+r^2)\sqrt{1 - \frac{2r^2(1+\cos 2\theta)}{(1+r^2)^2}}} = \frac{1-r^2\cos 2\theta}{(1+r^2)}\left[1 - \frac{4r^2\cos^2\theta}{(1+r^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$R = -\sum_0^\infty \left[-\frac{a_n(n+1)}{2^n}\cos(n+1)\theta - \frac{b_n}{2^n}\cos(n-1)\theta \right] = +\frac{b_1}{2} + b_0\cos\theta + \sum_1^\infty \cos n\theta \left[n\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} \right]$$

$$S = -\sum_0^\infty \left[-\frac{a_n(n-1)}{2^n}\sin(n+1)\theta - \frac{b_n}{2^n}\sin(n-1)\theta \right] = \quad -b_0\sin\theta + \sum_1^\infty \sin n\theta \left[(n-2)\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} \right]$$

Równanie krzywej: $\frac{1}{r} = \sum_{m=0}^\infty (A_m \cos m\theta + \boxed{B_k} \sin k\theta)$ Symetryczne względem X

$$\frac{1}{r^n} = \sum (A_{mn}\cos m\theta + \boxed{B_{kn}\sin k\theta})$$

$$R = \sum_0^\infty \left\{ \left[a_n(n+1)\cos(n+1)\theta + b_n\cos(n-1)\theta \right] \sum_{n=} \left[A_{mn}\cos m\theta + \boxed{B_{kn}\sin k\theta} \right] \right\} = 0 \quad = \sum M_k \cos k\theta$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos k\theta \, d\theta$$

$$\frac{2}{\pi}\int \cos n\theta \cos m\theta \cos k\theta \, d\theta \quad = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\right]\cos k\theta \, d\theta \quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[\cancel{\cos(n+m+k)\theta + \cos(n+m-k)\theta} + \cos(n-m-k)\theta + \cos(n-m+k)\theta \right]$$

$$\int \sin n\theta \cos m\theta \cos k\theta \, d\theta \quad = \int \frac{1}{2}\left[\sin(n+m)\theta + \sin(n-m)\theta\right]\cos k\theta \, d\theta \quad \frac{1}{2k}$$ jeżeli $k = n+m$ lub $k = n-n$

$$\int_0^\pi \cos^2 k\theta \, d\theta = \frac{1}{k}\,\frac{\pi}{2}$$

$n+1-m = k$

$n+1+m = k$

$$2M_k = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(n+1)\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) + b_n A_{k-n+1,n} + b_n A_{n-1-k,n}}{k} = 0$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(n+1)\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) + b_n\left(A_{k-n+1,n} + A_{n-1-k,n}\right)}{k} = 0$$

$$\sum \frac{a_n(n-1)\left(\qquad \right) + b_n\left(\qquad \right)}{k} = 0$$

$$\sum \frac{a_n n}{k}\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) = 0$$ wtedy $A_{i,n} =$

Jeżeli $x = \sum_0^\infty A_m \cos m\theta$

$$x^2 = \sum_0^\infty B_m \cos m\theta \qquad B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\sum_0^\infty A_n \cos n\theta\right)^2 \cos m\theta$$

$$= \sum A_n^2 \cos^2 n\theta \cos m\theta \quad + 2\sum A_n A_k \cos n\theta \cos k\theta \cos m\theta$$

$$= \frac{A_n^2}{2}(1 + \underset{\text{dla } m=2n}{\cos 2n\theta})\cos m\theta \quad + \frac{2A_n A_k}{2}\left[\cos(n+k)\theta + \cos(n-k)\theta\right]\cos m\theta$$

$n+k = m \qquad n-k = n$

$$= \cancel{\sum \frac{A_n^2}{2}\cos} = \frac{\pi}{m}$$

$$B_m = A_{\frac{m}{2}}^2 \frac{1}{2m} + \sum_{n=0}^{m} \frac{2A_n A_{m-n}}{2m} + \frac{2A_n A_{n-m}}{2m}$$

$\boxed{\text{Dla } \lim_{\infty} \frac{u}{v} = 0}$ $\quad \psi = c_0 + b_0 \lg r + \frac{c_1 \sin\theta}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n}\right)\sin n\theta$

pod zastrzeżeniem że ψ funkcja … i rosnąca się dążąc w …

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{b_0}{r} + b_1 \sin\theta - \frac{c_1 \sin\theta}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(n-2)c_n}{r^{n-1}} + \frac{n\, d_n}{r^{n+1}}\right]\sin n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \cancel{b_1 \cos\theta} + \frac{c_1 \cos\theta}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{c_n}{r^{n-1}} + \frac{d_n}{r^{n+1}}\right] n \cos n\theta$$

więc wogóle ruch $\lim_{\infty}\frac{u}{v} = 0$ niemożliwy jeśli równocześnie na powierzchni walca $u = v = 0$

Jeśli ściana $+X$:

$b_0 = 0$

$$\frac{c_1}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\left[\frac{c_n}{r^{n-1}} + \frac{d_n}{r^{n+1}}\right] = 0 \quad (n > 3)$$

$$\frac{c_1}{r^2} + \cancel{2 d_2} + 3c_3 + \frac{4c_4}{r} + \frac{5c_5}{r^2} + \frac{6c_6}{r^3} \dots = 0$$

$$+ \frac{2d_2}{r^3} + \frac{3d_3}{r^4} + \frac{4d_4}{r^5}$$

$b_0 = c_3 = 0 = c_4$

$c_5 = -\frac{c_1}{5}$

$c_6 = \frac{2d_2}{6}$

$c_7 = \frac{-3d_3}{7}$

$c_8 = \frac{-4d_4}{8}$

$c_n = -\frac{(n-4)\,d_{n-4}}{n}$

$\pm X$:

$b_0 = 0$

$$\frac{c_1}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\left[\frac{c_n}{r^{n-3}} + \frac{d_n}{r^{n+1}}\right](-1)^n = 0$$

$$\frac{c_1}{r^2} - 3c_3 + \frac{4c_4}{r} - \frac{5c_5}{r^2} + \frac{6c_6}{r^3}$$

$$\frac{2d_2}{r^3} - \frac{3d_3}{r^4} + \frac{4d_4}{r^5} \dots$$

$c_3 = c_4 = 0$

$c_5 = +\frac{c_1}{5} = 0$

$c_6 = -\frac{2d_2}{6}$

$c_7 = -\frac{3d_3}{7}$

$$\psi = \sum_{n=6}\left[-\frac{(n-4)}{n\, r^{n-2}}\sin n\theta + \frac{1}{r^{n-4}}\sin(n-4)\theta\right]c_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum_6\left[\frac{(n-2)(n-4)}{n\, r^{n-1}}\sin n\theta - \frac{n-4}{r^{n-3}}\sin(n-4)\theta\right]c_n$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sum\left[-\frac{(n-4)}{r^{n-1}}\cos n\theta + \frac{n-4}{r^{n-3}}\cos(n-4)\theta\right]c_n$$

$+Y$: $\quad -\frac{c_1}{r^2} - \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(n-2)c_n}{r^{n-3}} + \frac{n\, d_n}{r^{n+1}}\right](-1)$

$$-\frac{c_1}{r^2} + \cancel{c_3} + \frac{3d_3}{r^4} - \frac{3c_5}{r^2} - \frac{5d_5}{r^6} + \frac{5c_7}{r^4} + \frac{7d_7}{r^8} \dots = 0$$

$$-\frac{2d_2}{r^3} + \left(\frac{c_4}{r} + \frac{d_4}{r^5}\right)4 - \left(\frac{c_6}{r^3} + \frac{d_6}{r^7}\right)6 + 8\left(\frac{c_8}{r^5} + \frac{d_8}{r^9}\right) \dots = 0$$

zgadza się z dawniejszymi równaniami

$$R = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sin\theta \sqrt{\frac{1 - r^2\cos 2\theta + \sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}}{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}} = \frac{\sin\theta}{r^2}\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - \cos 2\theta + \sqrt{\frac{1}{r^4} + 1 - \frac{2}{r^2}\cos 2\theta}}{\left(\frac{1}{r}\right)^4 - \frac{2}{r^2}\cos 2\theta + 1}}$$

$$S = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

3

[redacted]